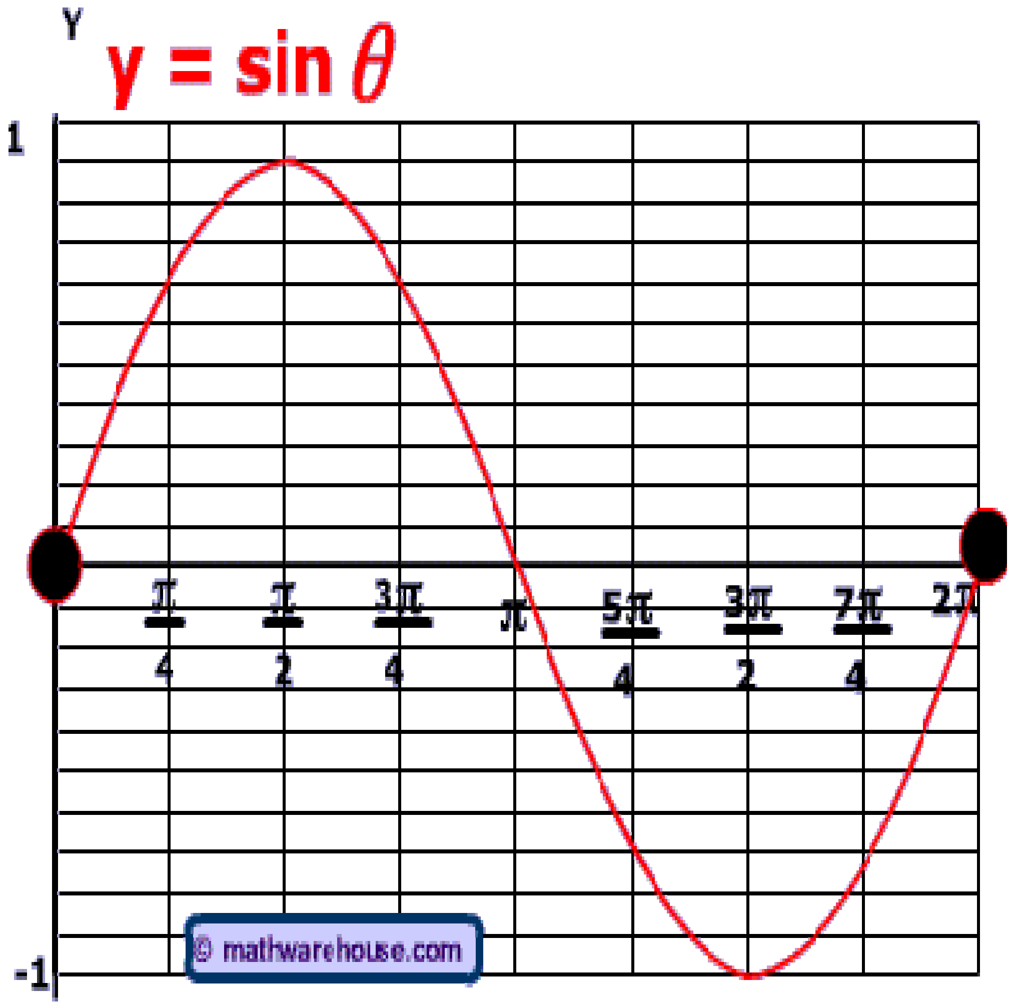
BAB IV
TRIGONOMETRI



Pendahuluan

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK-4)

Mampu menerapkan fungsi Trigonometri untuk memecahkan masalah pada bidang keteknikan

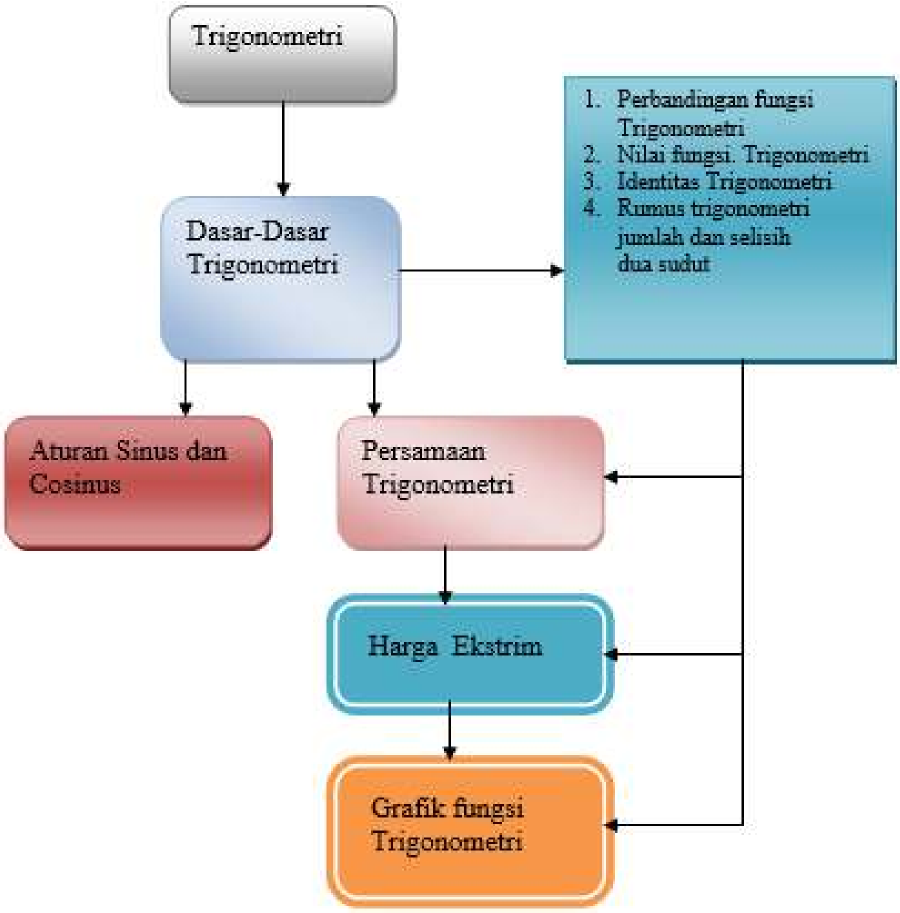
Sub- Capaian Pembelajaran Matakuliah (Sub-CPMK-4)

1 Mampu menjelaskan prinsip-prinsip dasar-dasar trigonometri
2 Mampu menetukan nilai fungsi trigonometri untuk sudut istimewa
3 Mampu menjelaskan aturan sinus dan cosinus
4 Mampu menerapkan prinsip Trigonimetri untuk menghitung luas bidang datar
5 Mampu menjelaskan rumus sin (x±y), cos (x±y), sudut ganda atau rangkap, hasil sinx .cos x dan cos x. sin x
6 Mampu mengambar grafik fungsi trigonometri
7 Mampu menerapkan dasar-dasar trigonometri, aturan sinus dan cosinus, grafik fungsi trigonometri untuk memecahkan masalah matematis pada bidang Teknik Mesin secara mandiri dan tepat

Indikator Hasil Belajar

1. Mengetahui difinisi sinus,cosinus, secan, tangen dan cotangen
2. Menghitung nilai sin,cos,tag,cotg, secan,dan cosecan
3. Menulis perbandingan sdt lancip
4. Menulis perbandingan sdt tumpul,dan negatif dari f trigonometri
5. Menulis rumus sdt Identitas
6. Menghitung luas bidang datar dg fungsi trigonometri
7. Menggunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut
8. Mampu menulis aturan sinus dan cosinus
9. Dapat metentukan komponen segitiga dengan menggunakan aturan sin dan cosinus
10. Menyesaikan pers.yang sederhana
11. Menyelesaika per.dalam bentuk a cos x+b sin x = c
12. Menyelesaikan pers. Yang dapat diubah kedalam bentuk a cosx + b sinx = c
13. Mampu menghitung hargaekstrim fungsi trigonometri
14. Mampu menghitung harga ekstrim bersyarat

Kerangka Isi Trigonometri



4.1 Dasar-Dasar Perbandingan Trigonometri.

4.1.1 Pengukuran Sudut

Sudut terdapat pada berbagai benda di sekitar kita. Perhatikan gambar 4.1

Gambar 4.1. Benda-Benda Bersudut

Umumnya satuan pengukuran sudut digunakan derajat (^{0}) dan radian (rad)

Pengukuran sudut dalam derajat . Derajat adalah nama satuan yang digunakan untuk menyatakan besar sudut. Satuan ini disebut juga satuan sudut sexagesimal, yaitu membagi keliling lingkaran menjadi 360 bagian yang sama. Setiap bagian disebut **1 derajat**. Dengan demikian :

1 putaran $= 1$ keliling lingkaran $= 360^\circ$

$\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2}$ keliling lingkaran $= 180^\circ$

$\frac{1}{4}$ putaran $= \frac{1}{4}$ keliling lingkaran $= 90^\circ$

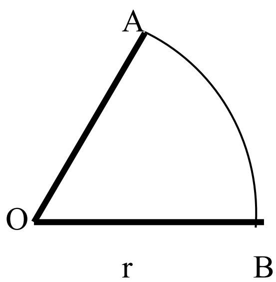
$\frac{1}{360}$ putaran $= \frac{1}{360}$ keliling lingkaran $= 1^\circ$

Oleh karena itu, diperoleh :

$\mathbf{1^\circ = \frac{1}{360}}$ **putaran** $= \frac{1}{360}$ **keliling lingkaran**

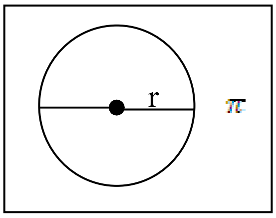
Pengukuran sudut dalam radian

Satu Radian adalah ukuran sudut pusat lingkaran yang panjang busur di depannya sama dengan jari – jari lingkaran.



Jika panjang busur AB sama dengan panjang OA atau OB (jari – jari), maka besar sudut AOB ($\angle$ AOB) disebut **1 radian.**

Hubungan Satuan Derajat Dengan Radian (rad) ini adalah sebagai berikut



Panjang busur suatu lingkaran = 2π . r

2π r disebut 2π rad

2π rad = 360°

π rad = 180°

$$180^0 = \pi \text{ rad}$$

$$1^0 = \frac{\pi \text{ rad}}{180}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3{,}14}$$

$$1 \text{ rad} = 57{,}3^0$$

Contoh

1. Nyatakan sudut 60^0 dan 150^0 kedalam satuan radian

   Jawab

   $$60^0 = 60.\frac{\pi}{180}\text{rad} = \frac{1}{3}\pi \text{ rad}$$

   $$150^0 = 150.\frac{\pi}{6}\text{rad} = \frac{5}{6}\pi \text{ rad}$$

2. Nyatakan sudut $\frac{1}{2}\pi$ rad dan $\frac{3}{4}\pi$ rad kedalam satuan derajad

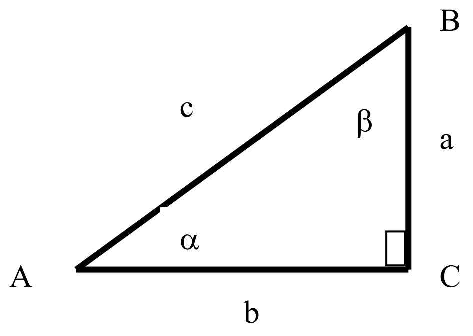
   Jawab

   $$\frac{1}{2}\pi \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi.\frac{180^0}{\pi} = 90^0$$

   $$\frac{3}{4}\pi \text{ rad} = \frac{3}{4}\pi.\frac{180^0}{\pi} = 135^0$$

4.1.2 Perbandingan Trigonometri dalam Segitiga Siku-Siku

Gambar 5.2 menunjukkan gambar segitiga siku-siku di C, dengan panjang AB = c, panjang AC = b, panjang BC = a, ∠ ABC = β, ∠ ACB = 90^0. Sisi AB disebut sisi miring (hipotenusa)



Gambar 4.2

Dalam segitiga siku-siku, berlaku perbandingan berikut:

$$\text{Sinus}\alpha = \frac{\text{sisi di depan }\alpha}{\text{sisi miring}}$$

$$\text{Cosinus}\alpha = \frac{\text{sisi terdekat}\alpha}{\text{sisi miring}}$$

$$\text{Tangen}\alpha = \frac{\text{sisi di depan}\alpha}{\text{sisi terdekat}}$$

$$\text{Cotangen}\alpha = \frac{\text{sisi terdekat}\alpha}{\text{sisi di depan}}$$

$$\text{Secan}\alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi terdekat}\alpha}$$

$$\text{Cosecan}\alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan}\alpha}$$

Dari sigitiga siku-siku di atas, maka:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \quad ; \cos\alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \tan\alpha = \frac{BC}{AC}; \quad \cot\alpha = \frac{AC}{BC};$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad ; \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}; \quad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{AB}{AC}; \quad \text{dan} \;\; \text{cosc}\alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}; \quad \text{dan} \;\; \text{cosc}\alpha = \frac{c}{a}$$

Berdasarkan hubungan di atas terlihat ada hubungan timbal balik antara fungsi sinus, cosinus dan tangen.

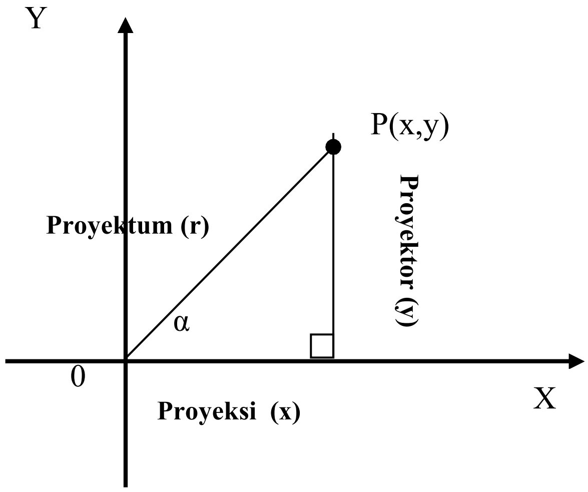
$$\cos ec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Dalam setiap segitiga siku-siku, jika r adalah sisi miring(proyektum), x sisi alas (proyeksi), dan y sisi tegak (proyektor) dan α sebagai sudut yang diapit oleh sisi alas dan sisi miring (gambar 4.2) maka definisi fungsi triginometri menjadi sebagi berikut

$\sin\alpha = \dfrac{\text{Panjang sisi tegak}}{\text{panjang sisi miring}}$	$\cos\alpha = \dfrac{\text{Panjang sisi alas}}{\text{panjang sisi miring}}$
$\tan\alpha = \dfrac{\text{Panjang sisi tegak}}{\text{panjang sisi alas}}$	$\cot\alpha = \dfrac{\text{Panjang sisi alas}}{\text{panjang sisi tegak}}$



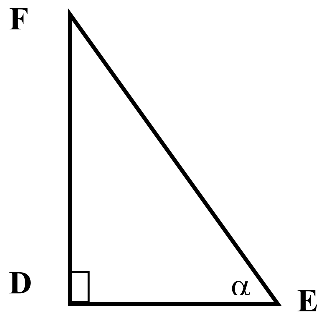
Gambar 4.3

Definisi di atas dapat ditulis:

$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$	$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$	$\text{Sec}\alpha = \dfrac{r}{x}$
$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$	$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$	$\text{Cosc}\alpha = \dfrac{r}{y}$

Contoh:

1. Tentukan nilai sin α, cos α, tan α, cot α, sec α, dan cosec α dari segitiga EDF berikut ini, jika DE = 6 dan DF = 8.



Gambar 4.4

Penyelesaian:

Pandang Δ DEF yang salah satu sudutnya siku-siku (90^0), berarti Δ DEF segitiga siku-siku sehingga berlaku teorema phytagoras, yaitu:

$EF^2 = DE^2 + DF^2$
$\quad = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$EF = \sqrt{100}$
$EF = 10$

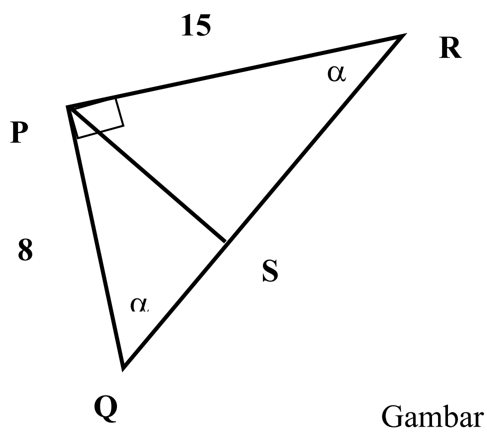
Jadi:

$$\sin\alpha = \frac{DF}{EF} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \quad ; \cos\alpha = \frac{DE}{EF} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\tan\alpha = \frac{DF}{DE} = \frac{8}{6} = 1{,}33; \qquad \cot\alpha = \frac{DE}{DE} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

$$\sec\alpha = \frac{EF}{DE} = \frac{10}{6} = 1{,}67; \qquad \text{dan} \quad \cos ec\alpha = \frac{EF}{DF} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

2. Perhatikan segitiga PQR berikut ini, kemudian: Tentukan panjang SR, QS dan PS!
   nilai cos α dari ΔPQR = nilai cos α dari Δ PSR



Gambar 4.5

Jawab:

$QR^2 = PR^2 + PQ^2$
$= 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$

$QR = \sqrt{289}$
$QR = 17$

Jadi:

Perhatikan ΔPQR

$$\cos\alpha = \frac{PR}{QR} = \frac{15}{17}$$

Perhatikan Δ PSR

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{SR}{PR} = \frac{SR}{15}$$

Nilai cos α dari ΔPQR = nilai cos α dari Δ PSR (karena besar sudutnya sama)

Jadi berlaku:

$$\frac{15}{17} = \frac{SR}{15} \Leftrightarrow 17SR = 15.15 = 225$$

$$SR = \frac{225}{17} = 13\frac{4}{17}$$

QS = QR - RS

$$QS = 17 - 13\frac{4}{17} = \frac{289-225}{17} = \frac{64}{17} = 3\frac{13}{17}$$

Nilai sin α dari ΔPQR = sini cos α dari Δ PSR

Perhatikan ΔPQR

$$\sin\alpha = \frac{PQ}{QR} = \frac{8}{17}$$

Perhatikan Δ PSR

$$\sin\alpha = \frac{PS}{PR} = \frac{PS}{15}$$

Jadi berlaku:

$$\frac{8}{17} = \frac{PS}{15} \Leftrightarrow 17PS = 8.15 = 120$$

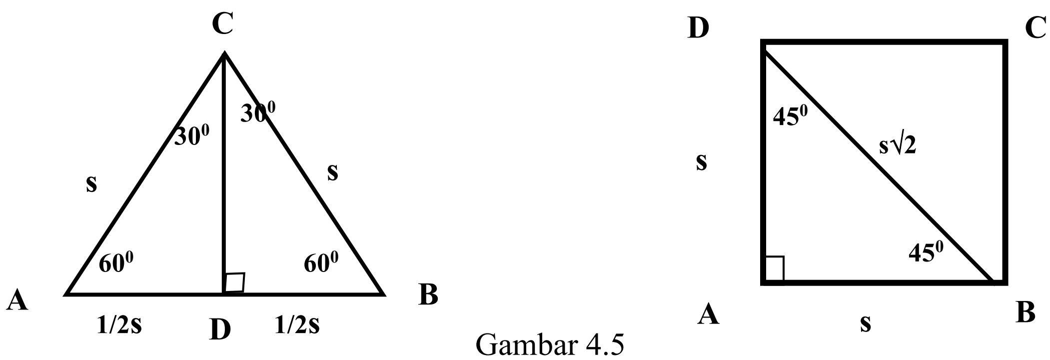
$$PS = \frac{120}{17} = 7\frac{1}{17}$$

4.2 Nilai Fungsi Trigonometri

Sudut-Sudut Istimewa.

Sudut-sudut istimewa 30^0 , 45^0 dan 60^0 nilai fungsinya didapat sigitiga samasisi

Perhatikan segitiga ABC samasisi dengan panjang sisi adala ***s*** satuan. Dari salah satu titik sudut ditarik garis tinggi misalnya dari titik C.



Gambar 4.5

Dari ΔACD didapat

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$$

$$CD = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}s^2}$$

$$CD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 30^0 = \frac{\text{AD}}{\text{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\text{s}}{\text{s}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\text{CD}}{\text{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\text{s}\sqrt{3}}{\text{s}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^0 = \frac{\text{AD}}{\text{CD}} = \frac{\frac{1}{2}\text{s}}{\frac{1}{2}\text{s}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 60^0 = \frac{\text{CD}}{\text{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\text{s}\sqrt{3}}{\text{s}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^0 = \frac{\text{AD}}{\text{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\text{s}}{\text{s}} = \frac{1}{2}$$

Dari ΔADB didapat

$$\tan 60^0 = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}s\sqrt{3}}{\frac{1}{2}s} = \sqrt{3}$$

$$\sin 45^0 = \frac{AD}{BD} = \frac{s}{s\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{AB}{BD} = \frac{s}{s\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{s}{s} = 1$$

Berdasarkan perhitungan perbandingan masing-masing sudut di atas dapat dirangkum nilai fungsi untuk sudut istimewa seperti tabel 4.1

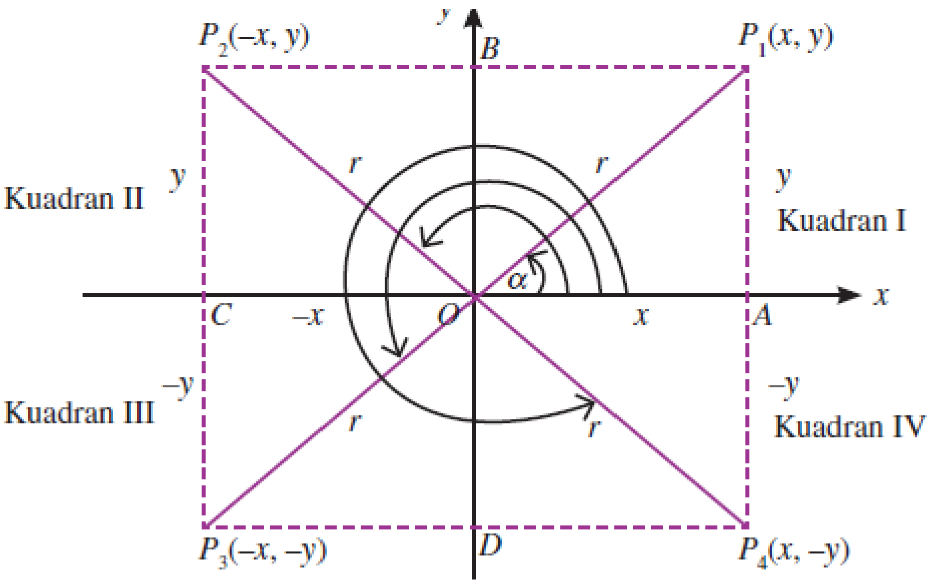
Tabel 4.1 Tabel Nilai Fungsi Untuk Sudut Istimewa 30^0, 60^0, 45^0, dan 90^0

Sehingga dari segitiga di atas didapat nilai fungsi untuk sudut istimewa berikut:

Sudut / Fungsi	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin x	1/2	½ √2	½ √3	1
Cos x	½ √3	½ √2	1/2	0
Tan x	1/3 √3	1	√3	-
Cot x	√3	1	1/3 √3	0

Perbandingan Trigonometri Untuk Sudut 0^0 s.d. 360^0 Dan Lebih Besar 360^0

Bidang koordinat kartesius terbagi menjadi 4 bagian yang sama , masing-masing bagian disebut kwadran I, II, III, dan IV. Nilai fungsi trigonometri di atas hanya berlaku hanya pada kwadran I, sedangkan untuk dikwadran lainnya didapat dari menggambar titik $P_1(x,y)$ berputar mengelilingi titik pusat (0,0) berlawanan arah jarun jam.



Gambar 4.6

Dalam Kwadran I : $0^0 < \alpha < 90^0$

$$Sin\alpha = \frac{y}{r}; \quad Cos\alpha = \frac{x}{r}; \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}; \quad \text{dengan } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Di kwadran I semua fungsi bernilai positif.

di kwadran II 9**$0^0 < \alpha < 180^0$**berlaku:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$$
$$cot(180^0 - \alpha) = -ctg\alpha$$

Jadi di kwadran ke II hanya fungsi sinus yang berharga positif dan yang lain berharga negatif.

Dengan cara yang sama didapatkan untuk sudut

Di Kwadran III : $180^0 < \alpha < 270^0$

$$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^0 + \alpha) = tg\alpha$$
$$cot(180^0 + \alpha) = ctg\alpha$$

Jadi di kwadran ke III hanya fungsi sinus dan cosinus yang berharga negatif dan yang lain berharga positif

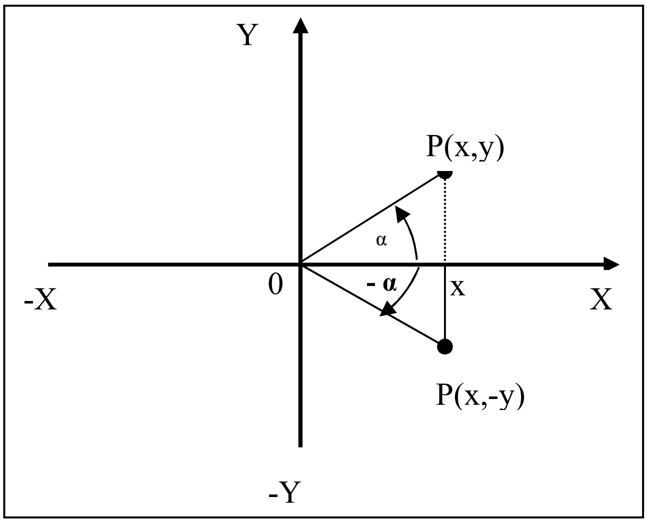
Di Kwadran IV : $270^0 < \alpha < 360^0$

$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(360^0 - \alpha) = -tg\alpha$$
$$cot(360^0 - \alpha) = -ctg\alpha$$

Jadi di kwadran ke IV hanya fungsi cosinus yang berharga positif dan yang lain berharga negatif.

Untuk sudut negatif.

Titik P berada pada posisi koordinat P(x,-y) dan besar sudut yang dibentuk 360^0- α, sama dengan posisi dikwadra IV, maka perbandingan fungsi menjadi sebagai berikut



Gambar 4.7

Perbandingan fungsi untuk sudut negative menjadi sebagai berikut

Dari grafik di atas didapat:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

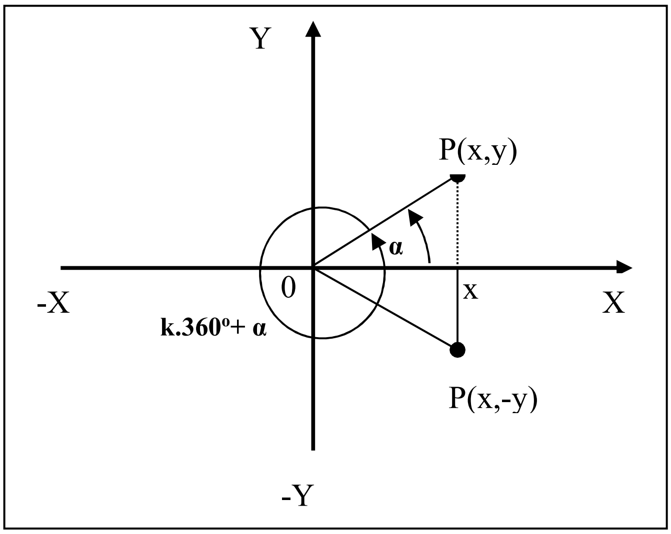
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$cot(-\alpha) = -ctg\alpha$

Jadi untuk sudut negatif hanya fungsi cosinus yang berharga positif dan yang lain berharga negatif.

Sudut-sudut yang lebih besar 360^0



Gambar 4.8

Titik P(x,y) membentuk sudut α dengan sumbu X positif diputar k kali 360^0 pada arah positif, titik P kembali keposisi semula, maka nilai fungsi untuk titik P akan sama dengan nilai fungsi semula. Sehingga untuk sudut yang lebih dari 360^0 akan berlaku:

$$\sin(\alpha + k.360^0) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + k.360^0) = \cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + k.360^0) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + k.360^0) = \cot\alpha$$

k adalah bilangan bulat positip

Contoh:

1. Tanpa kalkulator, tentukan nilai fungsi trigonometri berikut:
   a. $\sin 135^0$
   b. $\cos 210^0$
   c. $\tan 315^0$
   d. $\sec 300^0$
   e. $\cos(-60^0$

Jawab:

a. $\sin 135^0 = \sin(180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (kuadran II)

b. $\cos 210^0 = \cos(180^0 + 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (kuadran III)

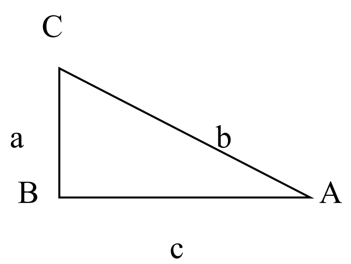
c. $\tan 315^0 = \tan(360^0 - 45^0) = -\tan 45^0 = -1$ (kuadran III)

a. $\sec 300^0 = \sin(360^0 - 60^0) = \sec 60^0 = \dfrac{1}{\cos 60^0} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b. $\cos(-60^0) = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$ (sudut negative)

4.3 Identitas Trigometri.

Persamaan adalah suatu pernyataan yang berlaku untuk nilai tertentu . Persamaan $4x - 2 = 14$ hanya benar jika $x = 4$ dan persamaan persamaan $x^2 - 4 = 0$ hanya benar jika $x = 2$ atau $x = -2$. Variabel dalam identitas, akan berlaku untuk semua nilai . Misalnya $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ berlaku untuk setiap nilai α berarti bentuk identitas. Identitas trigonometri yaitu rumus-rumus yang menghubungkan antara $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Dalam sigitiga siku-siku. Beberapa bentuk identitasnya adalah sebagai berikut:



Gambar 4.9

Dari Δ ABC didapatkan

$$\sin A = \frac{a}{b} \qquad \cos A = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{a}{c} \qquad \cot A = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c} = \tan A$$

Jadi $\dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A$

Identitas atau kesamaan merupakan suatu bentuk persamaan yang selalu bernilai benar. Untuk membuktikan kebenaran suatu identitas dapat dilakukan dengan bermacam-macam cara, di antaranya sebagai berikut.

1. Mengubah bentuk ruas kiri sehingga menjadi sama dengan ruas kanan.
2. Mengubah bentuk ruas kanan sehingga menjadi sama dengan ruas kiri.
3. Mengubah kedua ruas sehingga keduanya menjadi sama

Bentuk-bentuk identitas yang lain didapat dari segitiga phytagogras berikut.

Menurut teorema Phytagoras: $b^2 = a^2 + c^2$ ....(1)

Jika persamaan (1) dibagi a^2 didapat: $\text{Cosec}^2 A = 1 - \cot^2 A$

Jika persamaan (1) dibagi c^2 didapat : $Sec^2 A = \tan^2 A + 1$

Jika persamaan (1) dibagi b^2 didapat $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Atau $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ dan $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$.

Contoh

1. Buktikan identitas trigonometri berikut ini:

a) cos (A + B cos (A – B) = $\cos^2 A + \sin^2 B$

b) $\cos ec(A+B) = \dfrac{\cos ecA \cos ecB}{\cot anA + \cot anB}$

Jawab

1.a cos (A + B) cos (A – B) = $\cos^2 A - \sin^2 B$

Dengan menurunkan ruas kiri dari persamaan di atas, didapat;

(cos A cos B – sin A sin B) (cos A cos B + sin A.sin B)

$= (\cos A \cos B)^2 - (\sin A \sin B)^2$

$= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B$

$= \cos^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A) \sin^2 B$

$= \cos^2 A - \cos^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 B$

$= \cos^2 A - \sin^2 B$ karena sama dengan ruas kanan, maka identitas trigonometri di atas terbukti

1. b) $\cos(A+B) = \dfrac{\text{coscAcoscB}}{\cot A + \cot B}$

$$= \frac{\frac{1}{\sin A} \cdot \frac{1}{\sin B}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin A . \sin B} .}{\frac{\cos A \sin B + \mathrm{cas} B \sin A}{\sin A \sin B}}$$

$$= \frac{1}{\cos A \sin B + \mathrm{cas} B \sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin(A+B)} = \cos ec(A+B \ \text{(terbukti)}$$

1. $\dfrac{\sin \alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

   Penyelesaian:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha \ + (1+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha \ + \cos^2)\alpha + 1 + 2\cos\alpha)}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{2(1+\cos\alpha}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha)}$$

$$= 2\mathrm{cosc}\,\alpha$$

2. Diketahui $\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$ Tentukan cos α

   Jawab

   Telah diketahui bahwa: $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2\alpha$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2\alpha$$

$$1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \frac{49}{576} = \sec^2 \alpha$$

$$\frac{576+49}{576} = \sec^2 \alpha$$

$$\frac{625}{576} = \sec^2 \alpha$$

$$\sec\alpha = \sqrt{\frac{625}{576}}$$

$$\sec\alpha = \pm\frac{25}{24}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\pm\frac{25}{24}} = \pm\frac{24}{25}$$

Jadi $\cos\alpha = \pm\frac{24}{25}$

Contoh:

1. Buktikan identitas trigonometri berikut ini:

a) cos (A + B cos (A – B) = $\cos^2$ A + $\sin^2$B

b) $\operatorname{cosec}(A+B) = \dfrac{\operatorname{cosec}A \operatorname{cosec}B}{\operatorname{cotan}A + \operatorname{cotan}B}$

Jawab

1.a cos (A + B) cos (A – B) = $\cos^2$ A – $\sin^2$ B

Dengan menurunkan ruas kiri dari persamaan di atas, didapat;

(cos A cos B – sin A sin B) (cos A cos B + sin A.sin B)

= $(\cos A \cos B)^2 - (\sin A \sin B)^2$

= $\cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B$

= $\cos^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A) \sin^2 B$

= $\cos^2 A - \cos^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 B$

= $\cos^2 A - \sin^2 B$ karena sama dengan ruas kanan, maka identitas trigonometri di atas terbukti

1. b) $\operatorname{cosec}(A+B) = \dfrac{\operatorname{cosec}A \operatorname{cosec}B}{\operatorname{cotan}A + \operatorname{cotan}B}$

$$= \frac{\frac{1}{\sin A} \cdot \frac{1}{\sin B}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sin A.\sin B}.}{\dfrac{\cos A \sin B + \text{cas} B \sin A}{\sin A \sin B}}$$

$$= \frac{1}{\cos A \sin B + \text{cas} B \sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin(A+B)} = \cos ec(A+B \ \text{(terbukti)}$$

2. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

<u>Penyelesaian</u>:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha \ + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha \ + \cos^2)\alpha + 1 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha \ (1+\cos\alpha)}$$

$$= 2\cos ex\alpha$$

3. Diketahui $\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$ Tentukan cos α

Jawab

Telah diketahui bahwa: $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

$$1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2 = \sec^2\alpha$$

$$1 + \frac{49}{576} = \sec^2\alpha$$

$$\frac{576+49}{576} = \sec^2\alpha$$

$$\frac{625}{576} = \sec^2\alpha$$

$$\sec\alpha = \sqrt{\frac{625}{576}}$$

$$\sec\alpha = \pm\frac{25}{24}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\pm\frac{25}{24}} = \pm\frac{24}{25}$$

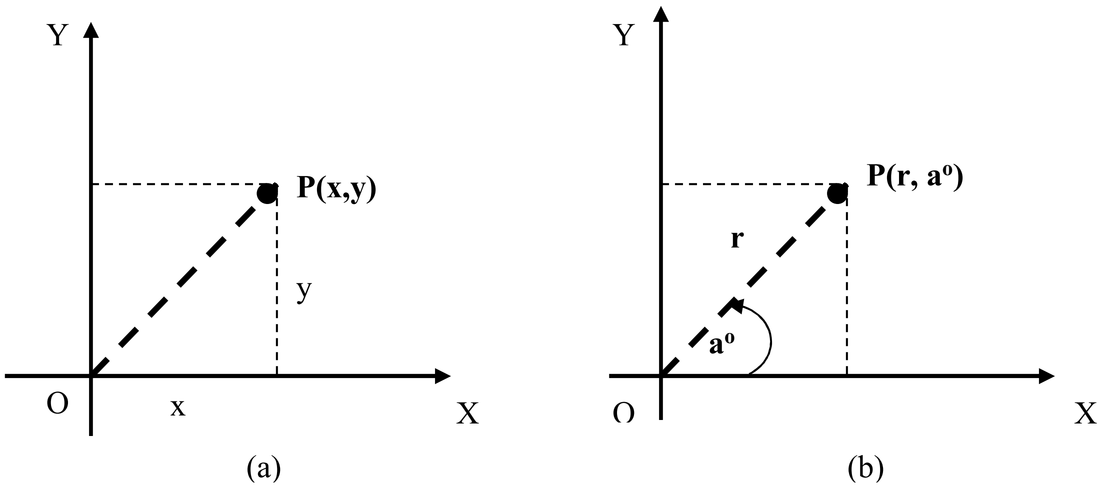
$$\text{Jadi } \cos\alpha = \pm\frac{24}{25}$$

4.4 Koodinat Kutub (Polar)

Pada umumnya, letak suatu titik dinyatakan dengan menggunakan koordinat Cartesius. Kadang-kadang untuk kepentingan tertentu, letak suatu titik dapat dinyatakan dengan koordinat kutub (polar)

Pada koordinat Cartesius, letak suatu titik ditentukan berdasarkan jarak dan arah terhadap dua garis yang saling tegak lurus. Garis tegak lurus merupakan sumbu koordinat. Jarak titik ke sumbu horizontal (sumbu-x) disebut ordinat dan jarak titik tersebut ke sumbu vertikal (sumbu-y) disebut absis. Pasangan koordinat Cartesius P dinyatakan dengan P(x,y), artinya titik P memiliki absis x dan ordinat y.

Pada koordinat kutub letak suatu titik ditentukan berdasarkan dua ukuran, yaitu jarak atau radius *r* (jarak dari suatu titik terhadap titik asal *O*) dan ukuran sudut a , yaitu sudut antara garis sumbu-*x* positif dengan garis penghubung titik tersebut dengan titik *O* yang ditarik berlawanan arah jarum jam. Koordinat kutub titik *P* dinyatakan dengan *P*(*r,* a^o). Artinya, titik P berjarak r satuan terhadap titik asal O dan membentuk sudut a^o terhadap sumbu x positif. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 5. 10a dan 5.10b



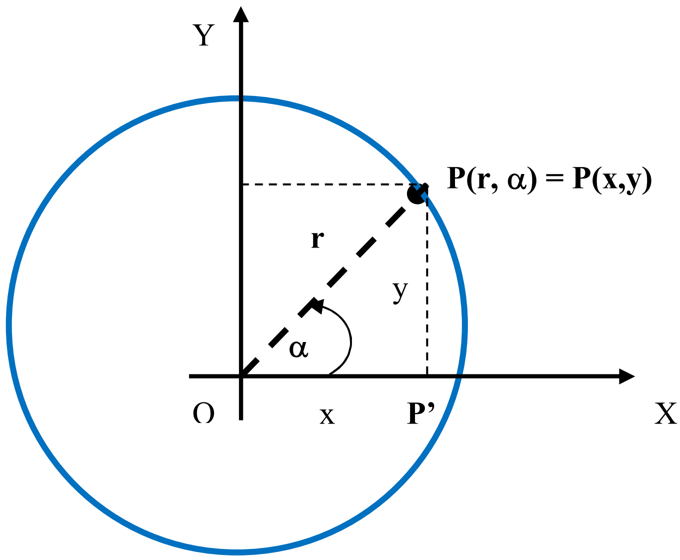
Gambar 4.10a Titik P dalam koordinat Cartesius

Gambar 4.10b Titik P dalam koordinat kutub (polar)

Selanjutnya, Anda akan belajar menggambar letak titik pada koordinat kutub. Langkah menentukan koordinat kutub suatu titik adalah menentukan sudut yang diukur dari sumbu-x, kemudian menentukan panjang jarak dari titik O ke titik P sepanjang r satuan.

Hubungan Koordinat Kutub dan Koordinat Cartesius

Perhatikan gambar 4.11 berikut



Gambar 4.11 Titik P dalam koordinat kutub dn koordinat Cartesius

Dari gambar 4.11 dapat ditentukan hubungan koordinat cartesius P(x,y) dengan koordinat kutub $P(r,\alpha)$, yaitu sebagai berikut

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow x = r \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \alpha = arc \tan \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jadi untuk mengubah koordinat kutub P (r, α) ke koordinat Cartesius dapat ditentukan dengan hubungan berikut.

P(x,y) = P(r cos α, r sin α)

Untuk megubah koordinat Cartesius P(x,y) ke koordinat kutub dapat ditentukan dengan rumus berikut

$$P(r, \alpha) = P(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{arc} \tan \frac{y}{x})$$

Dari keterangan tersebut dapat diperoleh hubungan antara koordinat Caresius dan koordinat kutub sebagai berikut.
Jika koordinat Cartesius P(x, y) diketahui, Anda dapat

memperoleh koordinat kutubnya, yaitu P(r, α) dengan nilai $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan α adalah sudut yang memenuhi

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$ atau $\alpha = \text{arc} \tan \frac{y}{x}$ (perhatikan kembali Gambar 2.24).

Jika koordinat kutub P(r, α) diketahui, Anda dapat memperoleh koordinat Cartesiusnya, yaitu P(x, y) dengan x = r cos α dan y = r sin α .

Contoh.

1. Koordinat kutub titik $P(4,30^0)$. Tentukan koordinat Cartesius titik P

   Jawab.

   Titik $P(4,30^0)$

   $R = 4$ dan $\alpha = 30^0$

   $x = r \cos \alpha$

   $x = 4 \cos 30^0$

$$x = 4.\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$y = r \sin \alpha$

$y = 4 \sin 30^0$

$$y = 4.\frac{1}{2} = 2$$

Jadi koordinat Cartesius titik ($2\sqrt{3}$, 2)

2. Nyatakan koordinat titik A(-1,1) dalam koordinat kutub A(r,α)

   Jawab

   A(-1,1)

   x = -1 dan y = 1. Titik A terletak di kuadran II

   Koordinat kutub titik A(r,α)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \text{arc tan}\,\frac{y}{x} = \text{arc tan}\,\frac{1}{-1} = \text{arc tan}\,(-1) = 135^0$$

   Jadi koordinat kutub titik P ($\sqrt{2}$, 135^0)

4.5 Aturan Sinus dan Cosinus.

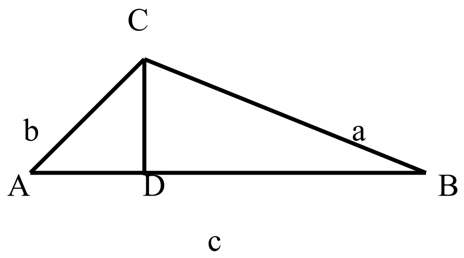
Pada kegiatan belajar sebelumnya, telah dipelajari rumus trigonometri. Rumus trigonometri yang telah dipelajari tersebut hanya berlaku pada segitiga siku-siku. Untuk segitiga sebarang, dapat ditentukan unsur-unsur yang belum diketahui dengan menggunakan aturan sinus dan aturan cosinus. Kedua aturan tersebut sebagai berikut.

4.4.1 Aturan sinus

Aturan sinus digunakan, jika diketahui :

a. Satu sisi dan dua sudut
b. Dua sisi dan satu sudut didepan sisi yang diketahui

Perhatikan segitiga ABC berikut dengan sudut lancip A



Gambar 4.14

Dari ΔADC : CD = b sin A

Dari ΔDBC : CD = a sin B

Berarti b sin A = a sin B

Atau $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

Jika dibuat garis tinggi dari B ke AC, akan didapatkan $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

Jadi dalam setiap segitiga ABC yang sisi-sisinya a, b, dan akan berlaku aturan sinus sebagai berikut:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Jika d adalah diameter lingkaran luar segitiga ABC maka berlaku:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \text{d}$$

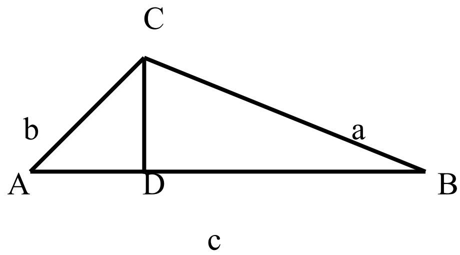
Aturan sinus digunakan untuk menentukan unsure-unsur pada segitiga yang belum diketahui, dengan syarat ada tiga unsur lainnya sudah diketahui, yaitu:

1. Menentukan panjang sisi segitiga bila diketahui panjang salah satu sisi dan besar dua sudutnya (s, sd,sd)
2. Menentukan besar sudut segitiga bila diketahui panjang dua sisinya dan besar satu sudut yang bersebelahan dengan satu sisi yang diketahui. (s,s, sd)

4.4.2 Aturan Cosinus.

Aturan cosinus digunakan, untuk menghitung unsur-unsur segitig jika diketahui:

a. Dua sisi dengan sudut apitnya (s, s, sd)
b. Ketiga sisinya (s, s, s)



Gambar 4.15

Dari Δ BCD : CD = a sin B dan BD = a cos B

AD = c – BD

AD = c – a cos B

Menurut teorema Phytagoras: $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$b^2 = (a \sin B)^2 + (c - a \cos B)^2$

$b^2 = a^2 \sin^2 B + c^2 - 2\, ac \cos B + a^2 \cos^2 B$

$b^2 = a^2(\sin^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2\, ac \cos B$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, ac \cos B$

Dengan cara yang sama, menggunakan pertolongan garis tinggi bisa didapatkan:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos A$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C$

Sehingga dalam setiap segitiga ABC yang sisi-sisinya a, b, dan akan berlaku aturan cosinus sebagai berikut:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos A$ atau $\qquad \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, ac \cos B$ atau $\qquad \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C$ atau $\qquad \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Contoh:

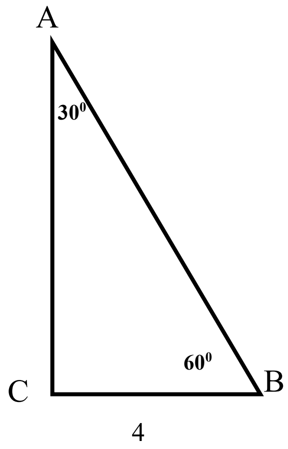
1. Diketahui segitiga ABC dengan $\angle$ A = 30^0, $\angle$ B = 60^0, dan panjang sisi BC = 4 cm. Hitunglah :

   a. Besar $\angle$C

   b. Panjang sisi AC dan AB

   Jawab

   Untuk memudahkan memahami persoalan tersebut, gambarkanlah sigitiga yang dimaksudkan.



Gambar 4.16

a. $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$

$\angle C = 180^0 - (30^0 + 60^0) = 90^0$

b. Panjang AC:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{AC}{\sin 60^0} = \frac{4}{\sin 30^0}$$

$$AC = \frac{4.\sin 60^0}{\sin 30^0}$$

$$AC = \frac{4.\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$$

Panjang AB:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{AB}{\sin 90^0} = \frac{4}{\sin 30^0}$$

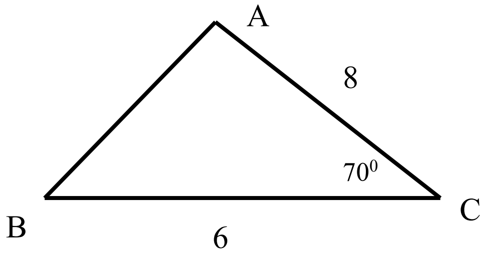
$$AB = \frac{4.\sin 90^0}{\sin 30^0}$$

$$AB = \frac{4.1}{\frac{1}{2}} = 8$$

Jadi $\angle C = 90^0$, panjang AC = $4\sqrt{3}$ cm dan panjang AB = 8 cm

2. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi a = 6, b = 8, dan $\angle C = 70^0$. Hitunglah panjang sisi c

   Jawab



Gambar 4.17

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos C$

$c^2 = 6^2 + 8^2 - 2\ 6.8 \cos 70^0$

$c^2 = 36 + 64 - 96\ (0{,}342)$

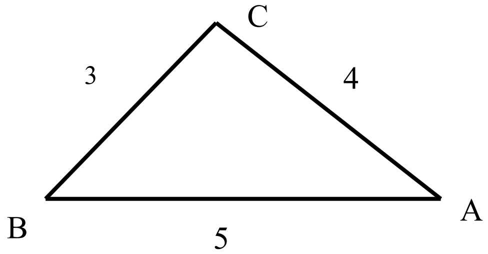
$c^2 = 100 - 32{,}83 = 67{,}17$

$c = \sqrt{67{,}17}$

$C = 8{,}19$

3. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi a = 3, b = 4, dan c = 5. Hitunglah besar sudut A, B, dan C

   Jawab



Gambar 4.18

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A$ atau

$$\cos A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}$$
$$= \frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2.4.5}$$
$$= \frac{36 + 25 - 9}{40}$$
$$= \frac{32}{40}$$
$$= 0{,}8$$

$\angle A = \text{arc cos } (0{,}8) = 36{,}9^0$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \text{ ac cos B}$ atau

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$$
$$= \frac{4^2 + 3^2 - 5^2}{2.4.3}$$
$$= \frac{16 + 5 - 25}{24}$$
$$= \frac{18}{30}$$
$$= 0{,}6$$

$\angle B = \text{arc cos } (0{,}6) = 53{,}1^0$

$\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$

$\angle C = 180^0 - (36{,}9^0 + 53{,}1^0) = 90^0$

Jadi $\angle A = 36{,}9^0$, $\angle B = 53{,}1^0$ dan $\angle C = 90^0$

4. Tentukan diameter lingkaran luarsegitiga ABC, jika diketahui sisi-sisinya : a = 6 cm, b = 8 cm dan c = 12 cm

   Penyelesaian:

   Ketiga sisinya diketahui, digunakan aturan cosinus

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \text{ bc cos A}$

   $$\cos A = \frac{8^2 + 12^2 - 6^2}{2.8.12} = \frac{208 - 36}{192}$$
   $$\cos A = 0{,}8958$$

   $A = \text{arc cos } 0{,}8958$

   $A = 26{,}4^\circ$

   $$d = \frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin 26{,}4^0}$$

d = 13,4 cm

4.6 Penerapan Trigonometri Menghitung Luas Bidang Datar

4.6.1 Luas Segitiga

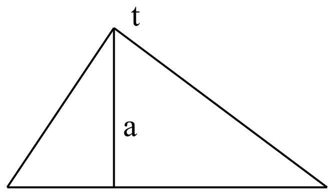
Luas segitiga adalah banyaknya satuan luas yang tepat menutupi permukaan segitiga itu. Telah diketahui bahwa luas segitiga dapat ditentuka jika panjang alas dan tinggi segitiga tersebut diketahui. Luas sigitiga = ½ alas . tinggi

Rumus luas segitiga tersebut dapat dikembangkan menjadi rumus luas segitiga yang lain dengan menggunakan unsur trigonometri.

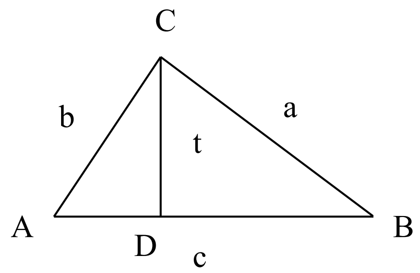
Jika salah satu alas dan garis tinggi pada alas tersebut diketahui, digunakan rumus berikut

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \text{ x alas x tinggi}$$

L = ½ a. t.



Apabila diketahui sebuah sudut dan dua sisi yang mengapit sudut



Lihat segitiga ADC

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \text{ x alas x tinggi}$$

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \text{ x AB x t} = \frac{1}{2} \text{ x c x t}$$

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \text{ x AB x t} = \frac{1}{2} \text{ x c x t}$$

$$\sin A = \frac{t}{b} \Leftrightarrow t = b \sin A$$

Luas segitiga = $\frac{1}{2}$ x c x b sin A

Luas = ½ bc sin A

Sejalan dengan cara diatas didapatkan rumus luas segitiga dilihat dari sudut A dan C sebagai berikut

Luas = ½ ac sin B

Luas = ½ ab sin C

Jika ketiga sisinya diketahui: digunakan aturan sinus atau cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$\text{Cos}^2A + \text{Sin}^2A = 1$

$\text{Sin}^2A = 1 - \text{Cos}^2A$

$\text{Sin}^2A = (1 - \text{Cos}A)(1 + \text{Cos}A)$

$$\sin^2 A = \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$\sin^2 A = \left(1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right) = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2b^2}$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{4b^2c^2}(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)$$

Misalkan ada satu bilangan real positif $s = \frac{1}{2}$ keliling Δ ABC $= \frac{1}{2}(a + b + c)$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) \Leftrightarrow 2s = a + b + c$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{4b^2c^2} 2s(2s - 2a)(2s - 2c)(2s - 2b)$$

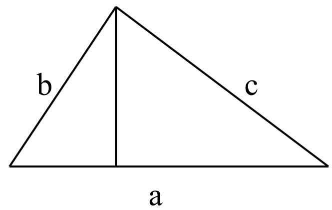
$$\sin^2 A = \frac{1}{4b^2c^2} 4s(s-a)(s-c)(s-b)$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}$$

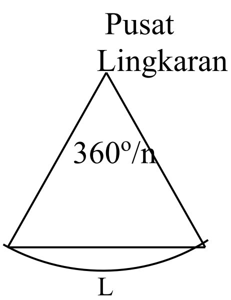
$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} c \;\; b \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{Luas segitiga} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Dimana s = ½ (a + b + c)



4.6.2 Luas Segi Banyak Beraturan.



Misalkan L adalah panjang sisi segi n . Dalam segi banyak ini terdapat n buah segitiga sama kaki yang sama dan sebangun.

Sudut puncat dari setiap segitiga ini adalah $360^0/n$.

Luas segi n beraturan = n kali luas segi tiga sama kaki.

$$= n.\frac{1}{2}.\text{alas x tinggi}$$

$$= n\,.\frac{1}{2}.L..\,Tg(90^0 - \frac{180^0}{n}).\frac{1}{2}.L$$

$$= \frac{n.L^2}{4} Tg(90^0 - \frac{180^0}{n})$$

$$\text{Jadi luas segi n beraturan} = \frac{n.L^2}{4} tg(90^0 - \frac{180^0}{n})$$

Untuk segi 4 beraturan ; n = 4

Luas = $\frac{4.L^2}{4} tg(90^0 - \frac{180^0}{4}) = L^2 tg 45^0 = L^2$

Untuk segi 6 beraturan ; n = 6

Luas = $\frac{6.L^2}{4} tg(90^0 - \frac{180^0}{6}) = 1{,}5 L^2 tg 60^0 = 2{,}598 L^2$

Untuk segi banyak dengan jumlah sisi genap, Misalkan w adalah jarak antara sisi yang berhadapan atau jarak sisi sejajar, berararti tinggi segitiga sama kaki =w/2 dan alasnya = $2.\frac{w}{2}.tg\frac{180^0}{n}$

Luas segi n beraturan

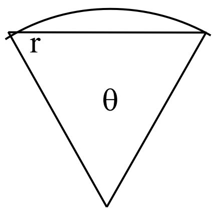
$= n.\frac{1}{2}.\text{alas x tinggi}$

$= n.\frac{1}{2}.2.\frac{w}{2}\,Tg(\frac{180^0}{n}).\frac{w}{2}.$

$= \frac{n.w^2}{4}Tg(\frac{180^0}{n})$

Jadi luas segi n beraturan untuk banyak sisi genap : $= \frac{n.w^2}{4}Tg(\frac{180^0}{n})$

4.6.3 Luas Segmen Lingkaran.



Gambar di atas adalah segmen atau juring lingkaran yang berjari-jari r

Luas juring $= \frac{\theta}{360^0}.\pi\, r^2$ (dalam derajat) atau luas ljuring $= \frac{\theta}{2}.r^2$ (dalam radian)

Luas segitiga = $\frac{1}{2}.r^2 \sin\theta$

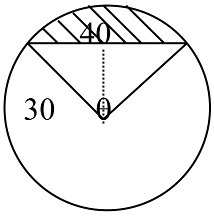
Luas segmen tembereng = luas juring – luas segitiga

Luas segmen $= \frac{\theta\, r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$ (θ dalam radian)

Contoh:

1. Sebuah tembereng lebih kecil dari setengah lingkaran dengan jari-jari busur 30 mm. Jika panjang tali busur 40 mm tentukan luas segmen tersebut.

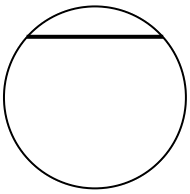
Penyelesaian:



$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{20}{30} \Rightarrow \theta = 1{,}46\,rad$$

Luas segmen = $\frac{30^2}{2}$(1,46 –sin 1,46) = 209,75 mm^2

2. Gambar berikut menunjukkan logam bulat berdiameter 34 mm. Batang tersebut akan di frais selebar 16 mm sepanjang batang itu.

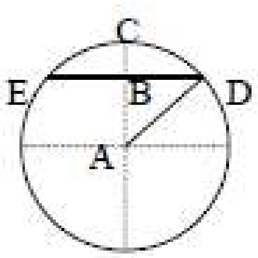


Hitunglah:

a. Kedalaman pemotongan

b. Luas penampang logam terpotong

Penyelesaian:



a. Berdasarkan gambar; AD = 17 mm

BD = 1/2 lebar yang d frais = 8 mm

$AD^2 = BD^2 + BA^2$

$BA^2 = 17^2 - 8^2 = 225$

BA = 15 mm

Kedalaman pemotongan CB = CA – BA

CB = 17 – 15 = 2 mm
Kedalaman pemotongan = 2 mm

c. Luas pemotongan

Dalam ΔABC $\angle BAD = \arcsin \frac{8}{17} = 28{,}07^0$

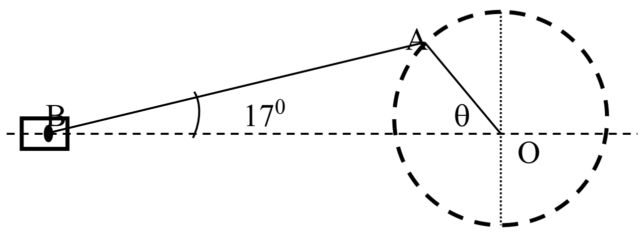
Sudut pusat segmen $\theta = 2 \times 28{,}07^0 = 56{,}14^0$ $\Rightarrow 56{,}14^0 = 0{,}8306$ radian

Luas segmen = $\frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$

Luas segmen = $\frac{17^2}{2}(0{,}9806 - \sin 56{,}14^0) = 21{,}63 \text{ mm}^2$

Jadi luas penampang lintang yang dipotong = 21,63 mm^2

3. Gambar berikut menunjukkan bagian dari engkol dan batang torak. Panjamg OA 75 mm berputar pada O, panjang AB = 200 mm. Hitung sudut BOA sehingga $\angle$ B = 17^0



Penyelesaian:

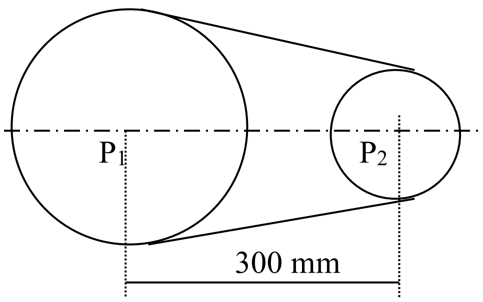
$$\frac{OA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{200 \sin 17^0}{75} = 0{,}7796$$

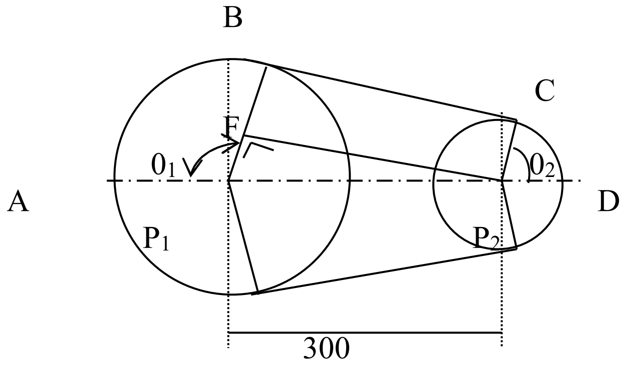
$$\theta = \arcsin 0{,}7796 = 51{,}229^0 \text{ atau } 128{,}77^0$$

Jadi besar sudut BOD = $51{,}229^0$ atau $128{,}77^0$

4. Hitunglah panjang sabuk yang menghubungkan dua pully dengan diameter 120 mm dan 280 mm dan jarak kedua pusatnya 300 mm.



Penyelesaian:



Panjang sabuk = 2 (panjang busur AB + panjang busur CD + CD)

Dari $\Delta\ P_1P_2F$:

$P_1P_2 = 300$ mm

$P_1F = 140 - 60 = 80$ mm

$$\text{Sin}\angle P_1P_2F = \frac{P_1F}{P_1P_2} = \frac{80}{300} = 0{,}27$$

$$\angle P_1P_2F = \text{arc sin } 0{,}27 = 15{,}7^0$$

$\angle\ \theta_2 = 180^0 - (90^0 + 15{,}7^0) = 74{,}3^0$

$\angle\ \theta_1 = 180^0 - (180^0 - 90^0 - 15{,}7^0) = 105{,}7^0$

$$\cap AB = \frac{\theta_1}{360^0}.2\pi\ \text{R} = \frac{105{,}7^0}{360^0}.2.3{,}14.140 = 258{,}14\text{mm}$$

$$\cap CD = \frac{\theta_2}{360^0}.2\pi\ \text{r} = \frac{74{,}3^0}{360^0}.2.3{,}14.60 = 77{,}77\text{mm}$$

$$BC = FP_2 = \sqrt{P_1P_2^{\ 2} - P_1F^2}$$

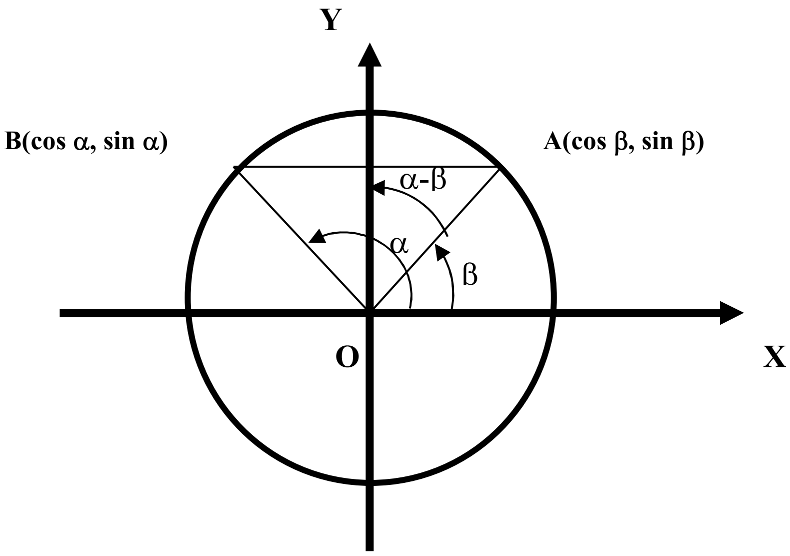
$$BC = \sqrt{300^2 - 80^2}$$

$$BC = \sqrt{83600} = 289{,}14 \text{ mm}$$

Jadi panjang sabuk = 2(258,14 + 77,77 + 289,14) = 1250,1 mm ≈ 1250 mm

4.7 Rumus Trigonometri Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut dapat digunakan untuk menentukan sinus, cosinus, dan tangent suatu sudut tanpa menggunakan Tabel atau kalkulator. Misalnya α dan β adalah dua sudut sembarang, secara geometris dapat ditentukan $(\alpha + \beta)$ dan $(\alpha - \beta)$. Perhatikan gambar 1.6. Gambar tersebut merupakan lingkaran berpusat di O dengan jari-jari 1, $\angle$ AOX = β, $\angle$ BOX = α, $\angle$ AOB = $\alpha - \beta$, koordinat titik A(cos β, sin β) dan B(cos α, sin α).



Rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut sebagai berikut

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Contoh

1. Dengan menggunakan rumus trigonometri jumlah atau selisih dari dua sudut, tentukan nilai dari fungsi berikut.
   a. Sin 15^0
   b. Cos 165^0
   c. Tan 105^0

   Jawab

   a. Ingat $15^0 = 45^0 - 30^0$

   Sin $15^0 = \sin(45^0 - 30^0)$

   $= \sin 45^0\cos 30^0 - \cos 45^0\sin 30^0$

   $$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}$$

   $$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

   $$\text{Sin } 15^0 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

   b. Ingatlah $165^0 = 120^0 + 45^0$

   Cos $165^0 = \cos(120^0 - 45^0)$

   Cos $165^0 = \cos 120^0\cos 45^0 - \sin 120^0\sin 45^0$

   $$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}. - \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

   $$= -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

   $$\cos 165^0 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

   c. Ingatlah bahwa $105^0 = 60^0 + 45^0$

   $\tan 105^0 = \tan(60^0 + 45^0)$

   $$\tan 105^0 = \frac{\tan 60^0 + \tan 45^0}{1-\tan 60^0.\tan 45^0}$$

   $$\tan 105^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1}$$

$$\tan 105^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\tan 105^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\tan 105^0 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}}\right)$$

$$\tan 105^0 = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3}$$

$$\tan 105^0 = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{-2}$$

$$\tan 105^0 = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$\tan 105^0 = -2-\sqrt{3}$$

Sudut Rangkap

Rumus sin 2α

Dengan menggunakan rumus trigonometri penjumlahan dua sudut diperoleh:

sin 2α = sin $(\alpha + \alpha)$ = sin α cos α + cos α sin α

= sin α cos α + sin α cos α

sin 2α = 2 sin α cos α

Rumus cos2α

Dengan menggunakan rumus trigonometri penjumlahan dua sudut diperoleh:

cos 2α = cos $(\alpha + \alpha)$ = cos α cos α - sin α sin α

cos 2α = cos^2 α - sin^2 α

Karena: cos^2 α = 1- sin^2 α

Maka: cos 2α = cos^2 α - sin^2 α

= 1- sin^2 α - sin^2 α

cos 2α = 1- 2 sin^2 α

Karena: sin^2 α= 1- cos^2 α

Maka: cos 2α = cos^2 α - sin^2 α

= cos^2 α **-** (1- cos^2 α)

$= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha$

$$\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1}$$

Rumus tan 2α

Dengan menggunakan rumus trigonometri penjumlahan dua sudut diperoleh:

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Dari rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut dapat dikembangkan menjadi rumus trigonometri perkalian sebagai berikut

$\sin A + \sin B = 2 \sin ½ (A + B) \cos ½ (A – B)$

$\sin A - \sin B = 2 \cos ½ (A + B) \sin ½ (A – B)$

$\cos A + \cos B = 2 \cos ½ (A + B) \cos ½ (A – B)$

$\cos A - \cos B = -2 \sin ½ (A + B) \sin ½ (A – B)$

Contoh

1. Jika $A = 105^0$; $B = 15^0$.Tentukan:

a) $\sin A + \sin B$

b) $\sin A – \sin B$

c) $\cos A + \cos B$

d) $\cos A – \cos B$

Jawab

a. $\sin 105^0 + \sin 15^0 = 2 \sin ½ (105^0 + 15^0) \cos ½ (105^0 – 15^0)$

$= 2 \text{ Sin } ½ (120^0) \cos ½ (90^0)$

$= 2 \text{ Sin } 60^0 \cos 45^0$

$$= 2.\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

b. $\sin 105^0 - \sin 15^0 = 2 \cos ½ (105^0 + 15^0) \sin ½ (105^0 – 15^0)$

$= 2 \cos \frac{1}{2} (120^0) \text{ Sin } \frac{1}{2} (90^0)$

$= 2 \cos 60^0 \text{ Sin } 45^0$

$= 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\cos 105^0 + \cos 15^0 = 2 \cos \frac{1}{2} (105^0 + 15^0) \cos \frac{1}{2} (105^0 - 15^0)$

$= 2 \cos \frac{1}{2} (120^0) \cos \frac{1}{2} (90^0)$

$= 2 \cos 60^0 \cos 45^0$

$= 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d. $\cos 105^0 - \cos 15^0 = -2 \sin \frac{1}{2} (105^0 + 15^0) \sin \frac{1}{2} (105^0 - 15^0)$

$= -2 \sin \frac{1}{2} (120^0) \sin \frac{1}{2} (90^0)$

$= - 2 \sin 60^0 \sin 45^0$

$= -2.\frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{6}$

4.8 Persamaan Trigonometri

Persamaan Trigonometri adalah persamaan yang mengandung fungsi trigonometri. Bentuk umum dari persamaan trigonometri, yaitu: sin x = a, cos x = a, tan x = a, dan a cos x + b sin x = c

Misalkan persamaan sin x = a. Nilai x yang memenuhi persamaan tersebut tidak hanya satu, tetapi bias lebih dari satu. Nilai- nilai x yang memenuhi persamaan tersebut dinamakan himpunan penyelesaian persamaan fungsi tersebut.

Himpunan Penyelesaian (HP) Persamaan sin x = a; cos x = a dan tan x = a,

Menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk sin x = a

Misalkan: sin x = a; andaikan a suatu bilangan real positif dimana $0 \le a \le 1$, maka sudut x yang memenuhi ada di kuadran I dan II atau perputarannya.

Misalnya,

$$\text{Sin } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sin^{-1}\frac{1}{2}$$

$$x = 30^0$$

$x = 30^0$ merupakan sudut positif terkecil yang memenuhi persamaan tersebut. Sedangkan sin x = sin $(180^0 - x)$, maka sudut 150^0 juga merupakan penyelesaiannya. Untuk sudut yang lebih dari satu kali putaran misalnya $360^0 + x$, nilainya juga sama dengan x. Sehingga, sudut yang memenuhi persamaan $\text{Sin } x = \frac{1}{2}$; tidak hanya 30^0, 150^0 melainkan juga sudut-sudut $30^0 + 360^0$, $30^0 + 720^0$, …., $150^0 + 360^0$, $150^0 + 720^0$,……

Jadi himpunan penyelasain persamaan $\text{Sin } x = \frac{1}{2}$ dapat ditulis sebagai berikut

HP = $\{(30^0 + k.360^0), (150^0 + k.360^0);\ k \in$ bilangan bulat$\}$

Jadi secara umum dapat ditulis

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$x_1 = \alpha + k.\ 360^0$$

$$x_2 = (180^0 - \alpha) + k.\ 360^0$$

$k \in$ bilangan bulat

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2 \sin x = \sqrt{3}$, $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab

$$2\sin x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin x = \sin 60^0$$

$$x_1 = 60^0 + k.\ 360^0$$

$k = -1 \Rightarrow x_1 = 60^0 + (-1)\ .\ 360^0 = 300^0$

$k = 0 \Rightarrow x_1 = 60^0 + 0.\ 360^0$

$k = 1 \Rightarrow x_1 = 60^0 + 1.\ \ 360^0 = 420^0$ dan seterusnya

$$x_2 = (180^0 - \alpha) + k.\ 360^0$$

$k = -1 \Rightarrow x_2 = (180^0 - 60^0) + (-1) \cdot 360^0 = 120^0 - 360^0 = -240^0$ (tidak memenuhi)

$k = 0 \Rightarrow x_2 = = (180^0 - 60^0) + 0 . 360^0 = 180^0 + 0 = 120^0$

$k = 1 \Rightarrow x_2 = = (180^0 - 60^0) + 1 . 360^0 = 120^0 + 360^0 = 480^0$ dan seterusnya

Karena $0^0 \le x \le 360^0$, himpunan penyelesainnya: $\{120^0, 300^0\}$

Himpunan Penyelesaian (HP) Persamaan cos x = a

Menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk cos x = a. Misalkan: cos x = a; andaikan a suatu bilangan real positif dimana $0 \le a \le 1$,

maka sudut x yang memenuhi ada di kuadran I dan IV atau

perputarannya.

Misalnya,

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \cos^{-1}\frac{1}{2}$$

$$x = 60^0$$

$x = 60^0$ merupakan sudut positif terkecil yang memenuhi persamaan tersebut. Sedangkan cos x = cos(- x), maka sudut -60^0 juga merupakan penyelesaian dari $\cos x = \frac{1}{2}$. Untuk sudut selain 60^0 dan (-60^0), sudut $(60^0 + k. 360^0)$ dan $(-60^0 + k. 360^0)$ juga merupakan penyelesaian dari $\cos x = \frac{1}{2}$. Jadi bentuk umum penyelesaiannya dapat ditulis: HP = $\{(60^0 + k.360^0), (-60^0 + k.360^0); k \in$ bilangan bulat$\}$

Jadi secara umum dapat ditulis

$\cos x = \cos \alpha$

$x_1 = \alpha + k. 360^0$

$x_2 = - \alpha + k. 360^0$

$k \in$ bilangan bulat

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2 \cos x = \sqrt{3}$, $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab

$2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos x = \cos 30^0$

$x_1 = 30^0 + k.\ 360^0$

$k = -1 \Rightarrow x_1 = 30^0 + (-1)\ .\ 360^0 = 330^0$

$k = 0 \Rightarrow x_1 = 30^0 + 0.\ 360^0 = 30^0$

$k = 1 \Rightarrow x_1 = 30^0 + 1.\ 360^0 = 390^0$ dan seterusnya

$x_2 = (-\ \alpha) + k.\ 360^0$

$k = -1 \Rightarrow x_2 = (-\ 30^0) + (-1)\ .\ 360^0 = -\ 30^0 - 360^0 = -390^0$

$k = 0 \Rightarrow x_2 = (-\ 30^0) + 0.\ 360^0 = -30^0$

$k = 1 \Rightarrow x_2 = =(-\ 30^0) + 1.\ 360^0 = -300^0 + 360^0 = 330^0$ dan seterusnya

Karena $0^0 \le x \le 360^0$, himpunan penyelesainnya: $\{30^0, 330^0\}$

Himpunan Penyelesaian (HP) Persamaan tan x = a

Menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk tan x = a. Misalkan diketahui persamaan: tan x = 1. Himpunan pnyelsaiannya dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut

Tan $x = 1 \Leftrightarrow x = \tan^{-1} 1$

$x = 45^0$

$x = 45^0$ merupakan sudut positif terkecil yang memenuhi persamaan tersebut. Sedangkan $\tan x = \tan(180^0 + x)$, maka sudut $(180^0 + 45^0$ juga menjadi penyelesaian persamaan tan x = 1. Fungsi tangent merupakan fungsi periodik dengan periode dasar 180^0, akibatnya bentuk umum penyelesain persamaan tan x = 1, dapat ditulis: Hp = $\{45^0 + k.180^0\ ;\ k \in$ bilangan bulat$\}$

Jadi secara umum dapat ditulis

$\tan x = \tan \alpha$

$x = \alpha + k.\ 180^0$

$k \in$ bilangan bulat

Contoh

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\tan x = \sqrt{3};\ 0^0 \le x \le 360^0$

Jawab

$\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = \tan 60^0$

$x = 60^0 + k.\ 180^0$

$k = 0$, maka $60^0 + 0.\ 180^0 = 60^0$

$k = 1$, maka $x = 60^0 + 1.\ 180^0 = 240^0$

$k = 2$,maka $x = 60^0 + 2.\ 180^0 = 420^0$ (tidak memenuhi)

Karena $0^0 \le x \le 360^0$, Jadi penyelesaiannya Hp: $\{ 60^0, 240^0\}$

2. Tentukan penyelesaian dari persamaan $\tan 2x = 1$; untuk $0 < x < 360^0$

Jawab:

Tan $2x = 1$

$\tan 2x = \tan 45^0$

Sehingga:

$2x = 45^0 + k.\ 180^0$

$x = 22{,}5^0 + k.\ 90^0$

$k = 0$, maka $x = 22{,}5^0 + 0.\ 90^0 = 22{,}5^0$

$k = 1$, maka $x = 22{,}5^0 + 1.\ 90^0 x = 115{,}5^0$

$k = 2$,maka $x = 22{,}5^0 + 2.\ 90^0 = 202{,}5^0$

$k = 3$,maka $x = 22{,}5^0 + 3.\ 90^0 = 292{,}5^0$

$k = 4$,maka $x = 22{,}5^0 + 4.\ 90^0 = 382{,}5^0$ (tidak memenuhi)

Karena $0 < x < 360^0$

Jadi himpunan penyelesaiannya Hp: $\{ 22{,}5^0, 115{,}5^0, 202{,}5^0, 292{,}5^0\}$

Menyatakan bentuk a cos x + b sin x menjadi bentuk k cos (x -α)

Misalkan $a \cos x + b \sin x = k \cos (x - \alpha)$

Dengan menggunakan rumus cosinus selisih dua sudut bentuk $k \cos (x - \alpha)$ dapat diulis

$k \cos (x - \alpha) = k (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) = k \cos x \cos \alpha + k \sin x \sin \alpha$

Swhingga: $a \cos x + b \sin x = k \cos x \cos \alpha + k \sin x \sin \alpha$

Dengan menyamakan koefisien- koefisien $\cos x + \sin x$ maka diperoleh:

k cos α = a ……(1)

k sin α = b ……(2)

Jumlahkan kuadrat-kuadrat dari (1) dan (2):

$k^2 \cos^2 \alpha = a^2$ ……(1)

$k^2 \sin^2 \alpha = b^2$ ……(2)

========================(+)

$k^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 + b^2$

$k^2 = a^2 + b^2$

akibatnya, $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

Dari persamaan (1) dan (2) juga juga didapat

$$\frac{k \sin \alpha}{k \cos \alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Jadi: a cos x + b sin x = k cos (x - α), dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

Dari persamaan (1) dan (2) terlihat bahwa kuadran sudut α sama dengan kuadran titik (a,b)

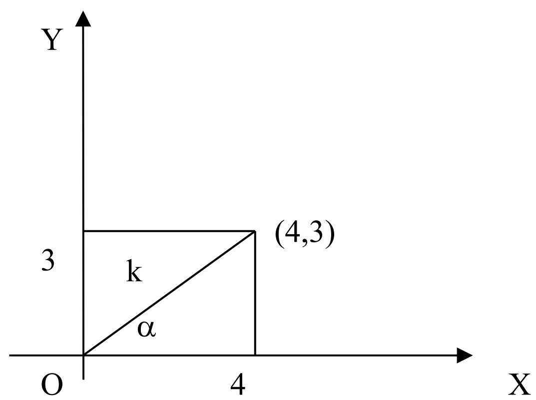
Contoh

Nyatakan 3 sin y + 4 cos y dengan bentuk k = cos (y - α)

Jawab

Anggaplah bahwa: 3 sin y + 4 cos y = k cos (y - α)

= cos y cos α + sin y sin α



k sin α = 3 }

$k \cos \alpha = 4$

Lihat gambar

$k = \sqrt{a^2 + b^2}$

$k = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, α dikuadran I

$\tan \alpha = \dfrac{b}{a}$

$\tan \alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \arctan \dfrac{3}{4}$

$\alpha = 36{,}87^0$

Jadi $3 \sin y + 4 \cos y = 5 \cos (y - 36{,}87^0)$

Nilai Maksimum dan Minimum dari $y = a \cos x + b \sin x$

Bentuk $y = a \cos x + b \sin x$ dapat dinyatakan sebagai bentuk $y = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (x - \alpha)$, karena untuk $0 < x < 360^0$

$y = \cos x$ mempunyai:

1) Nilai maksimum = 1, pada $x = 0$
2) Nilai minimum = -1, pada $x = 180^0$

Maka, $y = a \cos x + b \sin x$, untuk $0 < x < 360^0$ mempunyai :

Nilai maksimum = $\sqrt{a^2 + b^2}$, pada $x = \alpha$

Nilai minimum = $-\sqrt{a^2 + b^2}$, pada $x = (180^0 + \alpha)$

Kedua nilai maksimum/minimum $y = a \cos x + b \sin x$ merupakan nilai stasioner dari $y = a \cos x + b \sin x$

Jadi nilai stasioner $y = a \cos x + b \sin x$, untuk $0 < x < 360^0$ adalah:

$y_{maksimum} = \sqrt{a^2 + b^2}$, pada $x = \alpha$

$y_{minimum} = -\sqrt{a^2 + b^2}$, pada $x = (180^0 + \alpha)$

Contoh

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $y = 3 \cos x - 4 \sin x$

Jawab

$y = 3 \cos x - 4 \sin x$, maka $a = 3$ dan $b = -4$

$$y_{\text{ maksimum}} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$y_{\text{ minimum}} = -\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = -5,$$

Tentukan x pada $0 \le x \le 2\pi$ sedemikian hingga $y = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ mempunyai:

$y_{\text{ maksimum}} = 2$ dan $y_{\text{ minimum}} = -2$

Jawab

$y = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$, maka $a = 1$ dan $b = \sqrt{3}$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \alpha = \text{arc}\tan\sqrt{3}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\pi$$

$$y = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$$

$$y_{\text{maksimum}} = 2, \text{ jika } \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$$

Untuk:

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$$

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos 0$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = 0$$

$$x = \frac{1}{3}\pi$$

Untuk

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$$

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos 2\pi$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = 2\pi$$

$$x = \frac{7}{6}\pi$$

$$y_{\text{minimum}} = -2, \text{ jika } \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -1$$

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -1$$

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos\pi$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

Menyelesaikan Persamaan a cos x + b sin x = c

Pandanglah a cos x + b sin x = c,

karena a cos x + b sin x = k cos (x - α) dengan $k=\sqrt{a^2+b^2}$, k > 0 dan $\tan\alpha=\frac{b}{a}$,

maka: a cos x + b sin x = c

⇔ k cos (x - α) = c

$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{k}$

Persamaan a cos x + b sin x = c, dapat diselesaikan jika: $-1\le\frac{c}{k}\le 1$

Jadi Persamaan a cos x + b sin x = c, dapat diselesaikan jika: $-k\le c\le k$

dengan $k=\sqrt{a^2+b^2}$

Contoh.

Selesaikan persamaan $-2\cos x+\sqrt{3}\sin x=2$, untuk $0\le x<360^0$

Jawab

Misalkan: $-2\cos x+\sqrt{3}\sin x=k(\cos x-\alpha)$

$= k(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha)$

$= k\cos x\cos\alpha + k\sin x\sin\alpha$

k cos α = - 2

k sin α = √3

$k=\sqrt{(-2)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

Titik A ada di kuadran ke dua

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{-2}\Leftrightarrow\alpha=\arctan\frac{\sqrt{3}}{-2}$

$\alpha=139{,}1^0$

Persamaan menjadi

$\sqrt{7}(\cos x-139{,}1^0)=2$

$(\cos x-139{,}1^0)=\frac{2}{\sqrt{7}}=0{,}754$

$\cos(x-139{,}1^0)=\cos 40{,}8^0$

$x-139{,}1^0=40{,}8^0$

$x=40{,}8^0+139{,}1^0$

$x = 179{,}1^0$

$k = 2 + 2\sqrt{3}$ cm

$M = 2(\ k + 3\ )$

$M = 2[(2 + 2\sqrt{3}) + 3] = (10 + 4\sqrt{3})$ cm

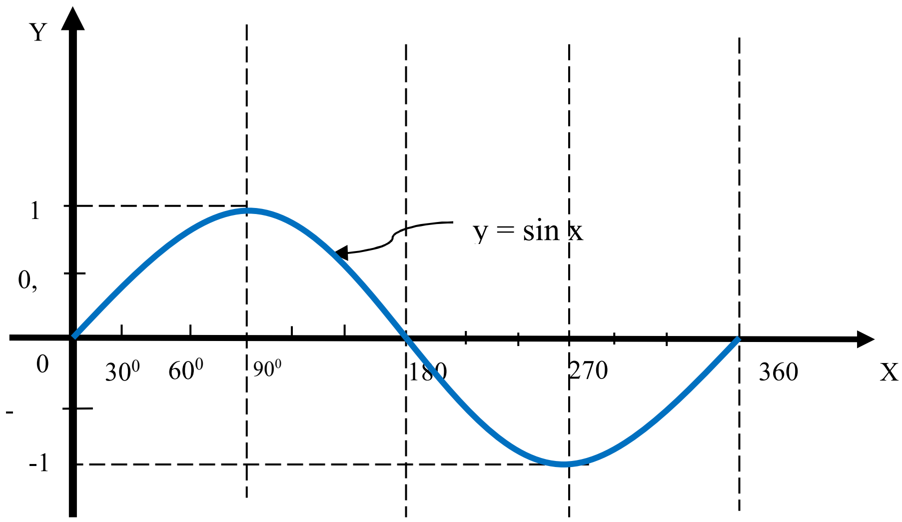
4.9 Grafik Fungsi Trigonometri

Grafik-grafik dari fungsi y = sin A, y = cos A, dan y = tan A dapat digambar dengan membuat nilai fungsi dari 0^0 sampai dengan 360^0. Dapat diambil nilai fungsi untuk sudut-sudut istimewa sebagai berikut.

Fungsi y = sinA

A	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	2700^0	300^0	330^0	360^0
Sin A	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,876	-1	-0,87	-0,5	0

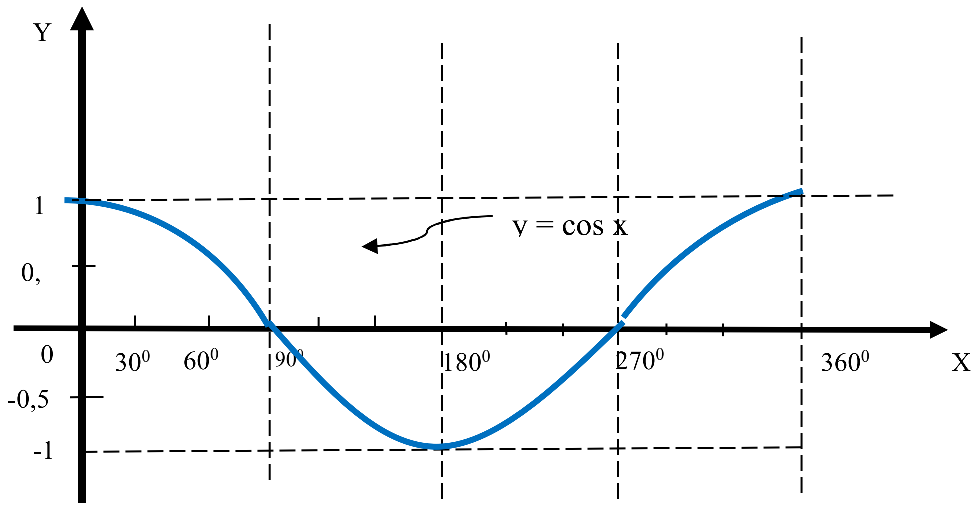
Grafik



Fungsi y = cos A

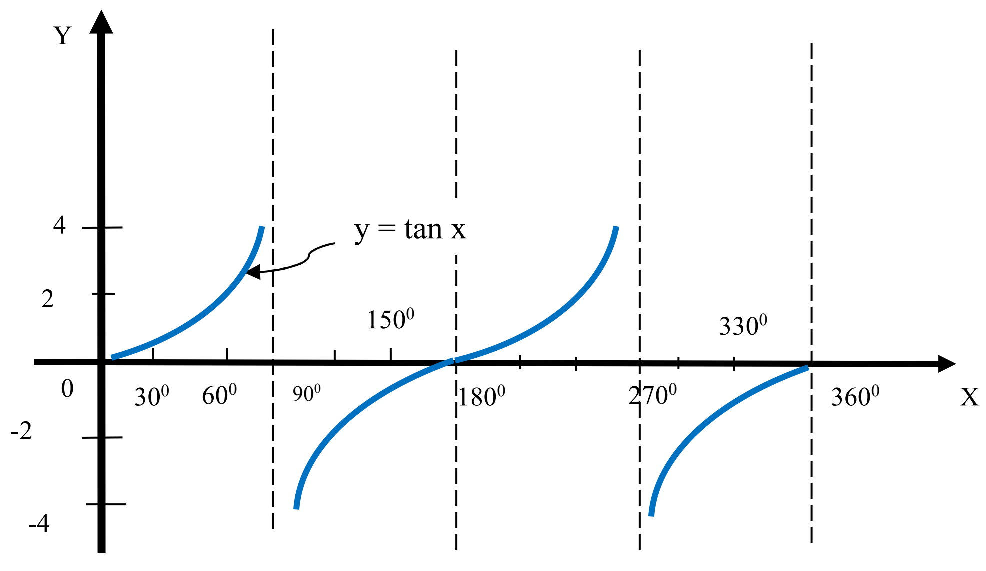
A	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0	360^0
Cos A	1	0,87	0,5	0	- 0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1

Grafik

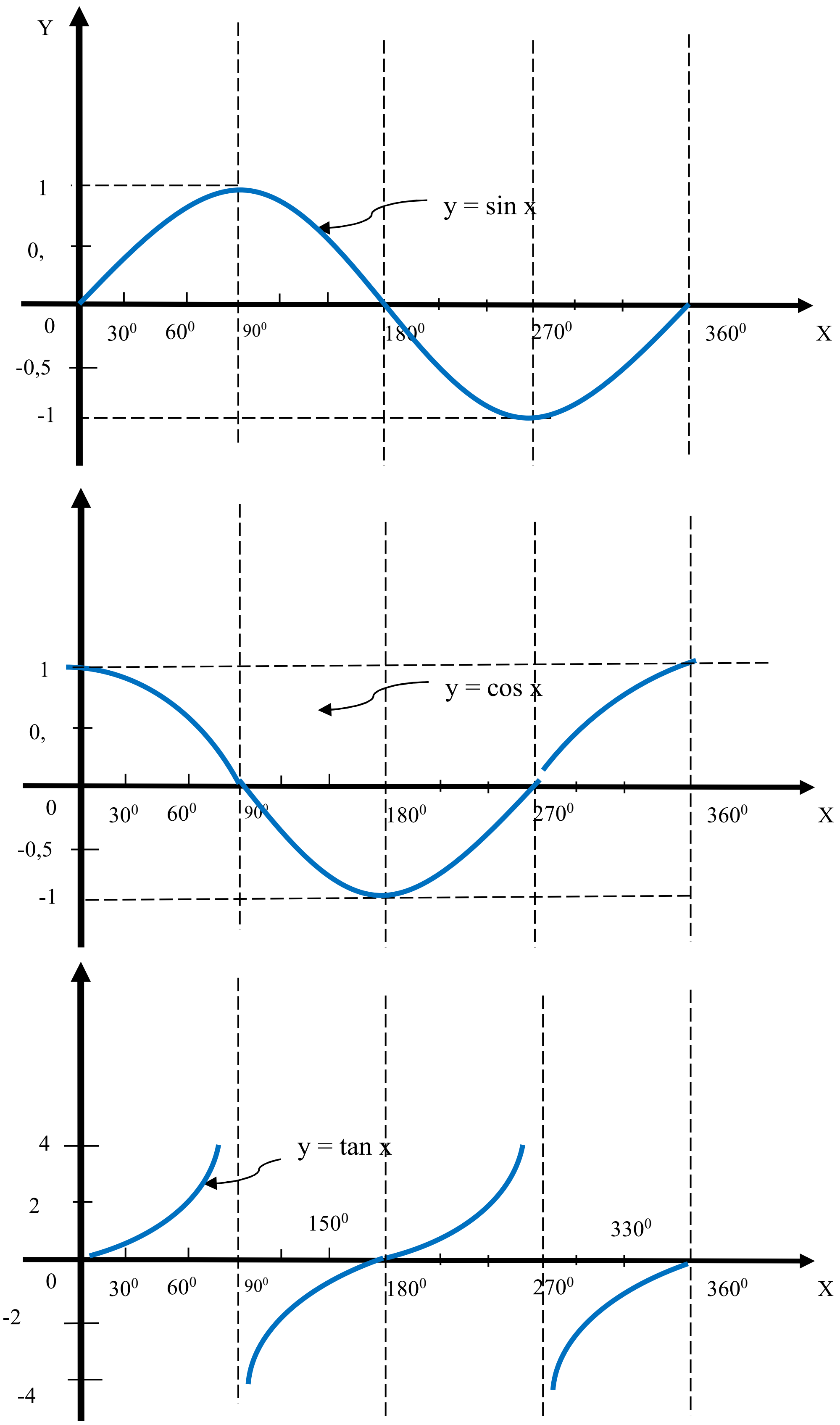


Fungsi y = tan A

A	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
tan A	0	0,58	1,7	∞	-1,7	-0,58	0	0,58	1,7	∞	-1,7	-0,58



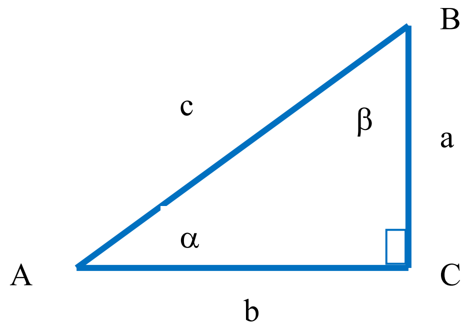
Grafik Gabungan y = sin x; y = cos x; dan y = tan x



1. Grafik sinus dan cosinus berosilasi di antara nilai puncak ± 1. Mempunyai nilai maksimum 1 dan minimum -1
2. Kurva cosinus mempunyai bentuk yang sama dengan kurva sinus tetapi bergeser 90^0
3. Kurva sinus dan cosinus kontinu dan berulang setiap melewati sudut 360^0, sedangkan kurva tangen tidak kontinu namun berulang setiap melewati sudut 180^0

Rangkuman 4

Dalam segitiga siku-siku, berlaku perbandingan berikut.



$\text{Sinus}\,\alpha = \dfrac{\text{sisi di depan}\,\alpha}{\text{sisi miring}}$	$\text{Sin}\ \alpha = \dfrac{a}{c}$
$\text{Cosinus}\,\alpha = \dfrac{\text{sisi terdekat}\,\alpha}{\text{sisi miring}}$	$\text{Cos}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$
$\text{Tangen}\,\alpha = \dfrac{\text{sisi di depan}\,\alpha}{\text{sisi terdekat}}$	$\text{Tan}\ \alpha = \dfrac{a}{b}$
$\text{Cotangen}\,\alpha = \dfrac{\text{sisi terdekat}\,\alpha}{\text{sisi di depan}}$	$\text{Cotan}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$
$\text{Secan}\,\alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi terdekat}\,\alpha}$	$\text{Sec}\ \alpha = \dfrac{c}{b}$
$\text{Cosecan}\,\alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan}\,\alpha}$	$\text{Cosec}\ \alpha = \dfrac{c}{a}$

Nilai Fungsi Untuk Sudut Istimewa 30^0, 60^0, 45^0, dan 90^0

Sudut / Fungsi	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin x	1/2	½ √2	½ √3	1
Cos x	½ √3	½ √2	1/2	0
Tan x	1/3 √3	1	√3	-
Cotan x	√3	1	1/3 √3	0

Identitas Trigonometri

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Atau $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ dan $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$.

$\text{Cosec}^2 A = 1 - \text{cotan}^2 A$

$\text{Sec}^2 A = \tan^2 A + 1$

Sudut dalam Kwadaran, Negatif dan lebih besar 360^0.

Kwadran I $0^0 \leq x \leq 90^0$

$\text{Sin } \alpha = \dfrac{y}{r}$

$\text{Cos } \alpha = \dfrac{x}{r}$

$\tan \alpha = \dfrac{y}{x}$ dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Semua fungsi bernilai positif

Kwadran II 9 $0^0 < x \leq 180^0$

$\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(180^0 - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

$\text{cotan}(180^0 - \alpha) = -\text{ctg } \alpha$

$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(180^0 + \alpha) = \text{tg } \alpha$

$\text{cotan}(180^0 + \alpha) = \text{ctg } \alpha$

$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(360^0 - \alpha) = \cos \alpha$

$\tan(360^0 - \alpha) = -\tan \alpha$

$\text{cotan}(360^0 - \alpha) = -\text{ctan } \alpha$

Kwadran I $180^0 < x \leq 270^0$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\text{cotan}(-\alpha) = -\text{cotan}\,\alpha$

$x < 0^0$ (-)

Kwadran I $0^0 \leq x \leq 90^0$

$\sin(\alpha + k.360^0) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + k.360^0) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + k.360^0) = \tan\alpha$

$\text{cotan}(\alpha + k.360^0) = \text{cotan}\,\alpha$

k adalah bilangan bulat positip

$x > 360^0$

Jika diketahui koordinat kutub/Polar titik P(r, α), koordinat Cartesius titik P(x, y) dengan x = r cos α dan y = r sin α .

Ddalam setiap segitiga ABC yang sisi-sisinya a, b, dan akan berlaku aturan sinus sebagai berikut:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Jika d adalah diameter lingkaran luar segitiga ABC maka berlaku:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \mathrm{d}$$

Aturan sinus digunakan untuk menentukan unsure-unsur pada segitiga yang belum diketahui, dengan syarat ada tiga unsur lainnya sudah diketahui, yaitu:

3. Menentukan panjang sisi segitiga bila diketahui panjang salah satu sisi dan besar dua sudutnya (s, sd,sd)
4. Menentukan besar sudut segitiga bila diketahui panjang dua sisinya dan besar satu sudut yang bersebelahan dengan satu sisi yang diketahui.
   (s,s, sd)

Dalam setiap segitiga ABC yang sisi-sisinya a, b, dan c berlaku aturan cosinus sebagai berikut.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A$ atau $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac \cos B$ atau $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos C$ atau $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Aturan cosinus digunakan, untuk menghitung unsur-unsur segitig jika diketahui:

a. Dua sisi dengan sudut apitnya (s, s, sd)

b. Ketiga sisinya (s, s, s)

Rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut sebagai berikut

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Rumus Sudut Rangkap(ganda)

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha}$$

$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Rumus Perkalian Trigonometri

$\sin A + \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$

Bentuk k cos (x – α)

a cos px + b sin px = k cos (x – α)

dengan k = $k=\sqrt{a^2+b^2}$ atau $\tan\alpha=\frac{b}{a}$

Pada bentuk k cos (x – α) berlaku:

Nilai maksimum = |k|

Nilai minimum = -|k|

Persamaan Trigonometri

Jika sin x^0 = sin p^0 maka x_1 = p^0 + n. 360^0 dan $x_2 = (180\text{-}p)^0$ + n. 360^0

Jika cos x^0 = cos p^0 maka x = ± p^0 + n. 360^0

Jika tan x^0 = tan p^0 maka x = ± p^0 + n. 180^0

Grafik Fungsi Trigonometri

1. Grafik sinus dan cosinus berosilasi di antara nilai puncak ± 1. Mempunyai nilai maksimum 1 dan minimum -1
2. Kurva cosinus mempunyai bentuk yang sama dengan kurva sinus tetapi bergeser 90^0
3. Kurva sinus dan cosinus kontinu dan berulang setiap melewati sudut 360^0, sedangkan kurva tangen tidak kontinu namun berulang setiap melewati sudut 180^0

Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi

a. Untuk sin x dan cos x

   y = k sin r(x+α) + c

   y = k cos r(x + α) + c

   y maksimum = |k| + c

   y minimum = - |k| + c

   $$\text{Periode } p = \frac{360^0}{|r|} \text{ atau } p = \frac{2\pi}{|r|}$$

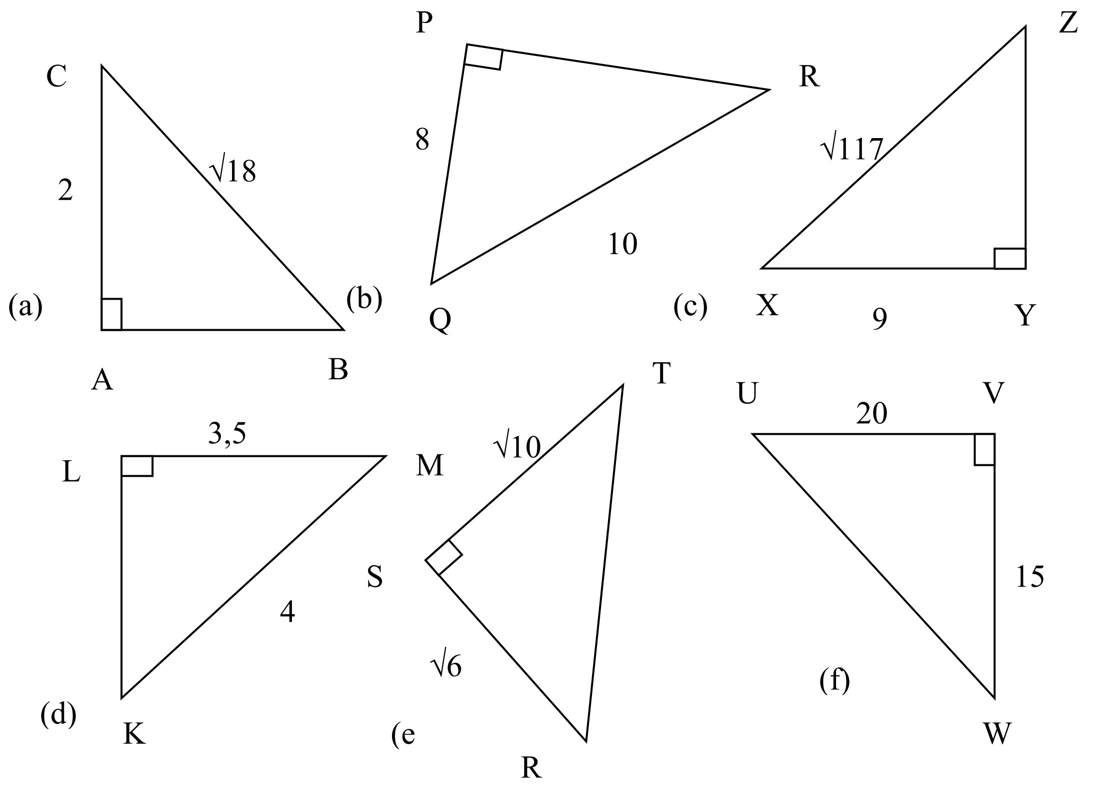
b. Untuk Tan

   $$\text{Periode } p = \frac{180^0}{|r|} \text{ atau } p = \frac{\pi}{|r|}$$

Latihan 4.

Latihan 4.1

1. Tentukan nilai perbandingan sinus, cosinus, tangent, dan cotangen dan sudut lancip dari segitiga berikut.



Gambar 4.12

2. Hitunglah nilai dari:

   a. $\sin 30^0 + \sec 30^0$

   b. $\cos 45^0 - \mathrm{cosec}\ 45^0$

   c. $\tan 60^0 - \cot 60^0$

   d. $\sin 30^0 \cos 60^0 + \sin 60^0 \cos 30^0$

   e. $\sin 45^0 \sin 60^0 + \cos 45^0 \cos 60^0$

3. Buktikan indentitas berikut.

   a. tan x + cot x = sec x cosec x

   b. (1- cos x)(cosec x + cot x) = sin x

   c. Sec ^{2} x(1 – cos^{2}x) = tan^{2}x

   d. $\dfrac{\sec^2\theta - 1}{\cos ec^2\theta - 1} = \tan^4\theta$

4. Hitunglah nilai dari:

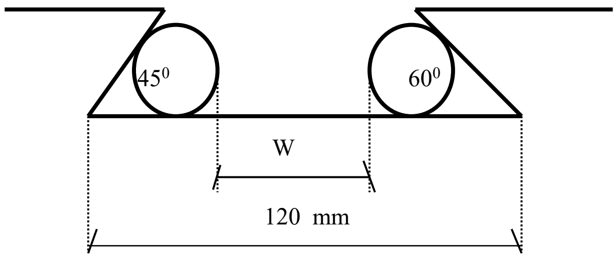
   a. Sin 225^0+cos 150^0

   b. Cosec 120^0 – sec 60^0

   c. Sec(-135^0) {tan 135^0 – sin 330^0}

   d. $\dfrac{\cos 45^0}{1-\sin 45^0} - \dfrac{\cos 45^0}{1+\sin 45^0}$

5. Tentukan jarak w untuk ekor burung tidak simetri berikut jika diameter Roller = 15 mm:



Gambar 4.13

6. Jika diketahui $\sin\alpha = \dfrac{-2}{3}$ dan α positif, tentukanlah:

   a. cos α

   b. tan α

   c. sec α

   d. cosec α

7. Ubahlah titik dalam koordinat kutub berikut ke dalam koordinat Cartesius. Kemudian, tunjukkan titik-titik tersebut pada satu bidang gambar.

a. $A(3, 45^0)$
b. $B(2, 135^0)$
c. $D(3, 270^0)$
d. $N(2, 330^0)$
e. $O(5, 750^0)$

8. Ubahlah titik-titik berikut ke dalam koordinat kutub. Kemudian, tunjukkan titiktitik tersebut pada satu bidang gambar.
   a. $P(3\sqrt{3}, 3)$
   b. $S(-5, -5)$
   c. $Q(-2, 2\sqrt{3})$
   d. $T(-3, 3\sqrt{3})$
   e. $R(\sqrt{3}, -1)$
9. Diketahui koordinat Cartesius titik $A(-8, y)$ dan koordinat kutubnya $A(r, 120^0)$. Tentukanlah nilai dari $y + r$.
10. Koordinat kutub P adalah $(2, \theta)$ dan koordinat Cartesiusnya adalah $(-1, y)$. Jika P terletak di kuadran III, tentukanlah nilai θ dan y.
11. Pada layar radar tampak dua titik P dan Q. Koordinat kedua titik tersebut $(3,40^0)$ dan $(6, 120^0)$. Tentukalah jarak PQ
12. Sebuah perahu bergerak dari pelabuhan Banoa ke pelabuhan Padang Bay dengan arah 60^0 dan kecepatan 50 km/jam. Setelah berlayar 2 jam, perahu tersebut tiba di pelabuhan Padang Bay Tentukanlah:
    a. Jarak pelabuhan Padang Bay dari pelabuhan Banoa
    b. Jarak pelabuhan Padang Bay dari pelabuhan
    c. arah Utara pelabuhan Banoa;
    d. Jarak pelabuhan Padang Bay dari pelabuhan
    e. arah Timur pelabuhan Banoa.

Latihan 4.2

Hitunglah panjang kedua sisi segitiga ABC yang diminta, jika kedua sudut dan panjang sisinya diketahui.

1. $\angle A = 30^0$; $\angle B = 60^0$ dan a = 6 cm
2. $\angle A = 45^0$; $\angle C = 60^0$ dan a = 8 cm
3. $\angle B = 60^0$; $\angle C = 75^0$ dan b = 7,5 cm

Hitunglah besar sudut-sudut dari segitiga ABC yang diminta, jika kedua panjang sisin dan sebuah sudutnya diketahui.

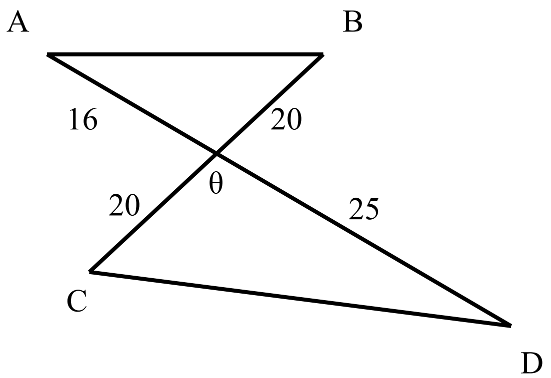
4. a = 23 cm ; c = 18,2 cm dan $\angle A = 49^0$

5. a = 12 cm; b = 9 cm dan $\angle C = 118^0$
6. b = 11 cm; c = 12 cm dan $\angle B = 120^0$

Hitunglah besar sudu yang diminta dari segitiga ABC inta, jika panjang sisi-sisinya diketahui.

7. a = 5 cm; b = 8 cm dan c = 7 cm ; $\angle A$ = …
8. a = 5 cm; b = 8 cm dan c = 7 cm ; $\angle C$ = ..
9. a = 4 cm; b = 5 cm dan c = 6 cm ; $\angle B$ = …

10. Perhatikan gambar di bawah ini.

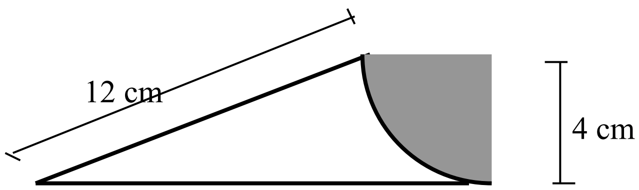


Jika CD =30, maka hitunglah panjang AB

19. Suatu segitiga ABC terletak pada lingkaran dengan panjang sisi a = 16 cm; b = 14 cm dan $\angle ABC = 40^0$. Hiutnglah diameter lingkaran luar segitiga.

Hitunglah sisi dan sudut lain dari segitiga ABC, jika diketahui:

20. $\angle A = 116^0$ $\angle C = 18^0$ dan a = 17 cm
21. a = 23 cm ; c = 18,2 cm dan $\angle A = 49^0$
22. $\angle A = 36^0$; $\angle B = 77^0$ dan b = 2,5 cm
23. a = 5 cm; b = 8 cm dan c = 7 cm
24. Hitunglah luas daerah yang tak diarsir pada gambar berikut



25. Dari sebuah lingkaran berjari – jari r dibuat segi delapan beraturan. Hitung luas daerah segi delapan tersebut dinyatakan dalam r.
26. Diketahui sebuah bujur sangkar ABCD dengan panjang sisi x. Dengan berpusat di A dilingkarkan busur BD dan berpusat di B dilingkarkan busur AC dan berpusat di

D dilingkarkan busur AC. Busur-busur tersebut berpotongan di P dan Q. Hitunglah luas yang dibatasi oleh busur PQ dan tali busur PQ.

27. Sebuah mata bor mempunyai sudut apit 120^0 . Lubang dengan diameter 30 mm harus dibor sehingga kedalamannya 50 mm . Hitunglah kedalaman yang harus dipotong oleh mata bor.
28. Sebuah batang bulat berdiameter 40 mm, akan dikerjakan mesin sehingga penampangnya berbentuk segi lima beraturan dengan luas maksimum.
    a. Hitung luas segi lima beraturan.
    b. Berapa prosen batang yang hilang.
29. Jika gaya 100 N, dan 210 N dalam keadaan setimbang, hitunglah sudut apit antara kedua gaya tersebut.
30. Suatu beban digantungkan dari batang mendatar oleh 2 rantai yang panjangnya 2,5 m dan 2,05 m. Titik-titik pengikatan kedua rantai berjarak 1,95 m. Hitunglah sudut yang dibuat masing-masing rantai dan batang mendatarnya.
31. Dua buah gaya 30 N dan 40 N bekerja pada sebuah benda, sudut apitnya 72^0. Hitunglah:
    a. Besar gaya Resultan
    b. Sudut antara gaya resultan dengan gaya 10 N
32. Untuk daerah tertentu, sebuah sungai mempunyai tebing – tebing yang sejajar. Titik A dan B yang berjarak 100 m terletak pada satu tebing. Titik C ada di tebing seberang, dimana sudut CAB = $43,3^0$ dan sudut CBA = $55,15^0$. Hitunglah:
    a. Jarak AC
    b. Jarak BC
    c. Lebar sungai

Latihan 4.3

1. Diketahui Sin A = 0,6 dengan $0^0 < A < 90^0$. Tentukan
    a. Sin 3A
    b. Sin^3 A
    c. Cos 4A
    d. Cos^4A
2. Diketahui cos B = 0,5 dan B sudut lancip, hitunglah nilai dari:
    a. Sin 3B

b. Cos 3B

c. Tan 3B

d. Sin^3B

e. Cos^3B

3. Sederhanakanlah

a. $\text{Sin } 34^0 + \sin 26^0$

b. $\text{Cos } 42^0 - \cos 18^0$

4. Hitunglah

a. $2 \sin 20^0 \cos 10^0$

b. $\sin \frac{1}{3}\pi \sin \frac{1}{6}\pi$

5. Buktikan identitas

$$\frac{\sin 4A + \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan 3A$$

Latihan 4.4

1. Hitunglah nilai dari cosinus dari sudut berikut:

a) $22{,}5^0$

b) $67{,}5^0$

2. Jika tan α = n, tentukanlah dari:

a. sin 2α

b. tan $\frac{1}{2}\alpha$

3. Tentukan penyelesaian persamaan trigonometri berikut ini:

a. cos $\frac{1}{2}$x = $\frac{1}{2}$; untuk $0 < x < 360^0$

b. cos x – sin x = 1; untuk $0 < x < 360^0$

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut

a. $\sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 0 \le x \le 2\pi$

b. $\cos(x + 10^0) = -1; \quad 0 \le x \le 360^0$

Latihan 4.5

Gambarlah

4. Grafik sinus dan cosinus berosilasi di antara nilai puncak ± 1. Mempunyai nilai maksimum 1 dan minimum -1
5. Kurva cosinus mempunyai bentuk yang sama dengan kurva sinus tetapi bergeser 90^0
6. Kurva sinus dan cosinus kontinu dan berulang setiap melewati sudut 360^0, sedangkan kurva tangen tidak kontinu namun berulang setiap melewati sudut 180^0

Umpan Balik

Untuk mengetahui tingkat pengusaan anda terhadap materi, gunakan rumus berikut

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jumlah skor}}{\text{Jumlah soal}} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang anda capai:

90% - 100% = baik sekali
76% - 89% = baik
60% - 75% = sedang
< 60% = kurang

Jika anda mencapai tingkat pengusaan minimal 60%, anda dapat meneruskan kompetensi dasar berikutnya. Tetapi jika anda mencapai tingkat penguasaan kurang dari 60%, anda harus mengulangi materi tersebut terutama yang belum dikuasai.

Kepustakaan

John Bird. 2002. *Matematika Dasar Teori dan Aplikasi Praktis*. Jakarta: Erlsngga

E J Purcell, 2004. *Kalkulus dan Geometri Analitik*, Erlangga: Jakarta. F J Aires, Vector Analysis, Schaum Series: New York.

KA Stroud, 2004. Matematika untuk Teknik, Erlangga: Jakarta.

Marray R. Spiegel (alih Bahasa Kasir Iskaandar). 1989. *Seri Buku Scaum Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga

Rantadewi, dkk.2013. *Matematika Teknik Untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa

Sain Sarge Lang, Gene Murrow, *Geometri,* 1997, Printed United States of America

GLOSARIUM

Bilangan real	Bilangan nyata. Bilangan nyata yang dimaksud di sini adalah semua bilangan yang secara tertulis dapat dipelajari dan diajarkan secara aksiomatik. Bilangan real terdiri dari dua jenis bilangan yaitu bilangan rasional dan irasional
Bilangan rasional	bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$; $b \neq 0$ dengan a, b bilangan bulat
Bilangan irasional	Bilangan irasional merupakan suatu bilangan real yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b ; $b \neq 0$
Membandingkan	Bila kita mengamati 2 buah benda, kita dapat membandingkan ukuran kedua benda tersebut, misalnya membandingkan tingginya, anjangnya, beratnya dan sebagainya. Untuk embandingkan dua ukuran dapat dinyatakan dengan hasil bagi dari kedua ukuran tersebut
Bilangan pecahan	Bilangan yang menyatakan setengah dan seperempat dinamakan bilangan pecahan. Jadi bilangan yang dinyatakan dalam bentuk a/b disebut bilangan pecahan dengan “ a” sebagai pembilang dan “b” sebagai penyebut, dengan a,b bilangan cacah dan $b \neq$ nol.
Determinan	Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi. Determinan matriks A ditulis dengan tanda det(A), det A, atau $\|A\|$. Determinan dapat dianggap sebagai faktor penskalaan transformasi yang digambarkan oleh matriks.
Diskriminan	Diskriminan adalah suatu nilai yang menjadi penentu sifat-sifat dari akar suatu persamaan kuadrat.
Akar persamaan kwadrat	Akar persamaan kwadrat adalah penyelesaian dari suatu persamaan kwadrat
Nilai ekstrim	Nilai ekstim adalah nilai minimum dan maksimum suatu fungsi pada selang tertentu.
Trigonometri	Cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut.
Koordinat cartesius	Suatu sistem koordinat yang menggunakan dua garis menentukan kedudukan suatu titik pada bidang. Di mana dua garis yang dimaksud adalah sumbu X dan sumbu Y, serta perpotongan kedua titik itu adalah titik asal. Koordinat cartesius sering disebut dengan koordinat siku-siku.
Perbandingan sinus	Perbandingan sisi di hadapan sudut dengan hipotenusa
Perbandingan cosinus	Perbandingan sisi penyiku di dekat sudut dengan hipotenusa
Perbandingan tangen	Perbandingan sisi penyiku di dekat sudut dengan sisi di hadapan sudut
Perbandingan cosecen	Perbandingan hipotenusa dengan sisi di hadapan sudut
Perbandingan secen	Perbandingan hipotenusa dengan sisi penyiku di dekat sudut
Perbandingan cotangen	Perbandingan sisi penyiku di dekat sudut dengan sisi di hadapan sudut

Sudut istimewa	Sudut tertentu yang nilai perbandingan trigonometrinya dapat dicari tanpa memakai tabel matematika atau kalkulator
Sudut elevasi	Sudut elevasi adalah sudut yang terbentuk antara garis lurus mendatar dengan posisi pengamat ke atas
Sudut depresi	*Sudut depresi* adalah sudut yang terbentuk antara garis mendatar dengan posisi pengamat pada bagian bawah